



Optimisation de la capacité des réseaux radio maillés

Christelle Molle

► To cite this version:

Christelle Molle. Optimisation de la capacité des réseaux radio maillés. Réseaux et télécommunications [cs.NI]. Université Nice Sophia Antipolis, 2009. Français. NNT : . tel-00428940

HAL Id: tel-00428940

<https://theses.hal.science/tel-00428940>

Submitted on 30 Oct 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS - UFR SCIENCES

**ÉCOLE DOCTORALE STIC
SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION
ET DE LA COMMUNICATION**

T H È S E

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'Université de Nice - Sophia Antipolis
Mention : **INFORMATIQUE**

Présentée et soutenue par

Christelle MOLLE

Optimisation de la capacité des réseaux radio maillés

Thèse dirigée par **Hervé RIVANO**

préparée dans le Projet MASCOTTE, I3S (CNRS/UNS)-INRIA

soutenue le 29 octobre 2009

<i>Rapporteurs :</i>	Jean-Claude KÖNIG	-	Professeur Université Montpellier II
	Catherine ROSENBERG	-	Professeur University of Waterloo
	Fabrice VALOIS	-	Professeur INSA Lyon
<i>Directeur :</i>	Hervé RIVANO	-	CR CNRS (Mascotte)
<i>Examineurs :</i>	Jean-Claude BERMOND	-	DR CNRS (Mascotte)
	Jacques BLANC-TALON	-	DGA/D4S/MRIS
	Yann VAXÈS	-	Professeur Université de la Méditerranée

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Hervé Rivano, mon directeur de thèse, qui a su me supporter tout au long de ces trois dernières années, en me donnant de précieux conseils et en m'accordant sa confiance et sa patience.

Un grand merci à Catherine Rosenberg, et Fabrice Valois pour m'avoir fait l'honneur de rapporter cette thèse, ainsi qu'à Jean-Claude König qui, en plus de rapporter le manuscrit, a accepté de présider mon jury de thèse. Merci également à Jean-Claude Bermond, Jacques Blanc-Talon, et Yann Vaxès qui ont accepté de prendre part au jury de ma thèse.

Mes remerciements s'adressent maintenant aux membres de l'équipe MAS-COTTE qui ont su, tous à leur manière, rendre ces trois années inoubliables. Travailler dans un tel cadre, tant au niveau scientifique que relationnel, est une chance. Merci beaucoup à tous : Stéphane, Nico, Fabrice, Ignasi, Dorian, Napi, minuscule, Majuscule, Joanna, Julian, Judicaël, Juan-Carlos, Nathann, et plus particulièrement à Jean-Claude, sans qui l'équipe ne serait pas ce qu'elle est ; David, pour ton écoute, ta gentillesse, et ta générosité ; Michel, merci pour tes précieux conseils pour l'enseignement, pour les déjeuners en terrasse, et pour ces bons moments du matin : le café n'aura plus jamais le même goût sans toi ; Patricia, avec qui j'espère faire une grande fête dans sa maison bientôt. Merci également à tous ceux qui sont partis : Marie-Emilie, Florian, Omid, Patricio, avec qui j'ai partagé de bons moments.

A titre plus personnel, je remercie toute ma famille, à commencer par mes parents, ainsi que pépé et mémé, qui n'ont pas toujours compris ce que je faisais mais qui m'ont toujours soutenu. Merci à mes cousines Audrey, Cindy, Sandra, mes potes "nissous" Amandine, Steph, Vanessa, Fab, Loic, Nico, Nils, Etienne (et oui j'ai bien mis niçois !), et aux autres partout en France Charlène, Claire, Emilie, Cedric, Guillaume S., Loic, Nico LG. et N. Merci à vous d'avoir été là pendant ces belles années d'étudiant.

Merci à mon petit mari, Guillaume, qui m'a accompagné, soutenu, supporté quotidiennement, qui ne m'a jamais laissé tombé malgré les nombreuses difficultés. Je ne sais pas comment j'aurai pu mener à bien ces travaux sans ton soutien.

Enfin, je ne pouvais pas finir sans mentionner Cacahuète, ma "mascotte" à moi, qui à sa manière a également contribué à cette thèse.

Ces trois ans de thèse ont été financé par la Direction Générale de l'Armement (DGA).



Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Les réseaux radio maillés	5
1.1.1	Technologie	7
1.1.2	Une mesure de performances : la capacité	10
1.2	La programmation linéaire	11
1.2.1	La dualité	13
1.2.2	Séparation = Optimisation	15
1.3	La bibliothèque MASCOPT	16
1.4	Plan détaillé	17
2	Modèles combinatoires pour les réseaux radio maillés	21
2.1	Modèle de communication radio	22
2.1.1	Un lien radio	22
2.1.2	Modèle de réseau	25
2.1.3	Réutilisation spatiale	26
2.1.4	Modèle de trafic	31
2.2	Configuration des réseaux radio maillés	34
2.3	Objectifs de l'optimisation	35
2.3.1	Placement minimum de points d'accès	35
2.3.2	Placement équitable d'un nombre fixe de points d'accès	36
2.3.3	Ordonnancement et routage équitable	36
2.3.4	Ordonnancement et routage en temps minimum	37
2.4	Vers une résolution efficace	38

3	Ordonnancement et Routage : une résolution efficace	43
3.1	Préliminaires	44
3.1.1	La formulation arc/chemin du multiflot	44
3.1.2	La génération de colonnes	46
3.2	Le problème de pondération des <i>rounds</i> (RWP)	48
3.2.1	Relaxation structurelle et formulation linéaire	48
3.2.2	Formulation chemin/round et relaxation linéaire	51
3.2.3	Dualité	52
3.3	Résolution par génération de colonnes	53
3.3.1	Trouver un plus court chemin pondéré	53
3.3.2	Trouver un <i>round</i> de poids maximum	58
3.4	Résultats et analyses	61
3.4.1	Débit et taille du réseau	62
3.4.2	Débit et densité de passerelles	63
4	Optimisation à partir d'informations locales	67
4.1	Flot maximum - Coupe minimum	68
4.1.1	Le problème du flot maximum	68
4.1.2	Lien avec la coupe minimum	69
4.1.3	Le théorème flot maximum - coupe minimum	70
4.2	Une nouvelle formulation de RWP	70
4.2.1	Formulation coupe/round	72
4.2.2	Equivalence des solutions	72
4.3	Algorithme primal-dual : génération croisée de lignes et colonnes	75
4.3.1	Dualité et problèmes auxiliaires	76
4.3.2	L'algorithme primal-dual	79
4.4	Performances	81
4.4.1	Mise en évidence de la zone de contention	83

4.4.2	Accélération de la résolution	84
5	Influence des acquittements sur la capacité	89
5.1	Hypothèses de fonctionnement du réseau	90
5.2	Modélisation de la gestion des acquittements	91
5.2.1	Modèle symétrique - Couche MAC	91
5.2.2	Modèle asymétrique - Couche transport	92
5.3	Formulation linéaire et génération de colonnes	93
5.4	Etude quantitative	94
5.4.1	Gain en capacité	95
5.4.2	Répartition de la charge dans le réseau	97
6	Vers un trafic dynamique	101
6.1	LGG : un algorithme distribué de gradient local	102
6.2	Stabilité dans un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau non saturé	106
6.3	\mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé	110
6.4	Stabilité d'un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé	114
6.4.1	\mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé non saturé	116
6.4.2	\mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé saturé aux destinations	121
6.4.3	\mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé saturé	123
6.5	Discussions	125
	Conclusion et perspectives	129
A	Notations et problèmes	131
A.1	Table des notations	131
A.2	Enoncés des problèmes	132

B	Programmation	135
B.1	Diagramme des classes	135
B.1.1	La génération de colonnes	135
B.1.2	La génération croisée	136
	Bibliographie	139

Table des figures

1.1	Un réseau radio maillé : exemple de réseau sans fil d'infrastructure fournissant un accès à Internet	3
1.2	Architecture à deux niveaux d'un réseau radio maillé	6
1.3	Méthode d'accès aléatoire au canal CSMA/CA.	8
1.4	Exemple de programme linéaire en dimension 2.	13
1.5	Correspondances entre les formulations primales et duales.	14
2.1	Différence d'approximation de la zone de transmission d'un nœud.	24
2.2	Les cercles représentent les zones de transmission des nœuds. Le nœud A peut communiquer directement avec les nœuds B, C, D , et E , mais pas avec le nœud F	25
2.3	(a) : Graphe des transmissions $G = (V, E)$. (b) : Graphe des conflicts $G_c = (V_c, E_c)$	30
2.4	Modèle d'interférence binaire à distance 2 : l'activation d'un lien bloque tous les liens situés à distance inférieure ou égale à 2.	31
2.5	Résultats pour la grille 4×4 . Les indices sur les liens représentent les intervalles de temps au cours desquels le lien est activé.	40
3.1	Modèle binaire d'interférence à distance 2 : (a) Graphe des trans- missions, (b) Graphe des conflits. Les ensembles de communica- tions compatibles $\{A1, A4\}, \{A2\}, \{A3\}$ constituent des stables du graphe des conflits.	49
3.2	L'ordre d'activation des <i>rounds</i> ne change pas la valeur de la so- lution optimale.	49

3.3	Le processus de génération de colonnes appliqué au problème du routage et de l'ordonnancement dans les réseaux radio maillés. . .	54
3.4	Graphe G' modifié de G en ajoutant un sommet virtuel g correspondant au nœud source de l'algorithme de Dijkstra.	57
3.5	Exemple de graphe aléatoire généré en utilisant MASCOPT.	62
3.6	Evolution de la capacité avec la taille du réseau.	63
3.7	Gain en débit par ajout de points d'accès.	64
3.8	Etude de l'influence de la distance entre 2 passerelles sur la capacité du réseau radio maillé en grille.	66
4.1	Une coupe C dans le graphe G isolant les points d'accès (ensemble V_g). Le bord (C, \overline{C}) de la coupe est représenté par les arcs en gras.	71
4.2	Le graphe associé (G', w) qui étend le graphe des transmissions G	73
4.3	Processus de génération croisée de lignes et de colonnes appliqué au problème de couverture des coupes par des <i>rounds</i> (CCP).	80
4.4	Nombre moyen de <i>rounds</i> générés durant la résolution des formulations chemin/ <i>round</i> et coupe/ <i>round</i>	82
4.5	Un faible nombre de coupes semblent suffisantes pour trouver la solution optimale de CCP.	83
4.6	Ecart à l'optimal du problème CCP restreint au k -voisinage des points d'accès.	85
4.7	Pourcentage du nombre de réseaux atteignant l'optimal suivant les valeurs de k	86
4.8	Ecart à l'optimal avec $k = 3$ pour un graphe aléatoire de 90 nœuds.	86
5.1	Modèles d'interférence binaires, les flèches représentent les communications n'interférant pas avec la communication $15 \rightarrow 16$. . .	92

5.2	Gain en capacité obtenu en reportant les acquittements au niveau transport sur des topologies en grille.	97
5.3	Gain en capacité obtenu en reportant les acquittements au niveau transport sur des topologies aléatoires.	98
5.4	Comparaison de la distribution de la charge dans un réseau radio maillé de 50 nœuds.	98
5.5	Pourcentage de routeurs dans le réseau ne recevant aucun trafic des autres nœuds.	99
6.1	Le multigraphe G modélisant le réseau.	103
6.2	Une \mathcal{S} - \mathcal{D} -coupe minimum dans le \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau G	111
6.3	Un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé étendu G^*	114
B.1	Diagramme de classes de la génération de colonnes implémentée dans MASCOPT.	136
B.2	Diagramme de classes de la génération croisée de lignes et de colonnes implémentée dans MASCOPT.	138

CHAPITRE 1

Introduction

L'essor des réseaux de télécommunications depuis de nombreuses années a donné lieu au développement de nombreux outils de communication. Le besoin de communiquer à plus grande distance a incité le développement de réseaux toujours plus grands, jusqu'au réseau mondial qu'est Internet. Les réseaux deviennent également de plus en plus accessibles au point de devenir incontournables au grand public de nos jours. La maîtrise des réseaux de télécommunications est un enjeu important pour les fournisseurs d'accès qui doivent faire face à l'importante demande de services de la part des utilisateurs, mais également aux questions de coût liées au déploiement et à l'entretien de ces réseaux.

Afin de garantir une communication entre deux entités pouvant être situées de quelques mètres à plusieurs milliers de kilomètres l'une de l'autre, de nombreux supports de communication ont successivement été développés. Le câble est le plus ancien support de communication permettant de relier directement deux entités entre elles. Le volume d'information transporté et la nature du câble ont nettement évolué, depuis les câbles coaxiaux en cuivre permettant le transport de quelques megabits par seconde jusqu'à l'apparition de la fibre optique dans les années 1970. Les câbles restent utilisés dans les réseaux de petite taille (de quelques mètres jusqu'à quelques kilomètres), alors que les fibres optiques se sont mieux adaptées aux communications longue distance grâce à une très faible atténuation le long de la fibre. En effet, les fibres optiques permettent le transport rapide de gros volume de données (offrant une bande passante sans équivalent de plusieurs terabits par seconde et par fibre). Ce type de réseau est aujourd'hui très utilisé dans le monde, principalement pour les réseaux d'infrastructure intercontinentaux, ou trans-continentaux.

Un inconvénient des réseaux filaires est le coût important de leur déploiement et leur faible adaptabilité. Avec l'urbanisation et la densification de la population, les investissements nécessaires au déploiement de réseaux métropolitains (MAN, *Metropolitan Area Network*) utilisant la fibre optique sont élevés pour les opérateurs et les collectivités. De plus, la gamme des services offerts aux utilisateurs doit être sans cesse en expansion, et il est difficile de prévoir lors

de l'installation des fibres si celles-ci pourront supporter la quantité de trafic à transporter. Les travaux en cas de modification sont trop importants pour les opérateurs qui cherchent avant tout des solutions évolutives et peu coûteuses.

Depuis le début des années 1990, le secteur des télécommunications a connu une révolution profonde avec l'apparition des services mobiles. L'un des aspects les plus importants de cette révolution est la transition entre un mode de communication entre deux points d'accès fixes et reliés par un câble, à un mode de communication sans fil entre personnes mobiles. La mobilité des services de télécommunications a un impact fondamental dans les modes de vie d'une partie croissante de la population. La popularité de ces réseaux sans fil pour les opérateurs vient également de leur facilité de déploiement. Les réseaux sans fil constituent une alternative aux réseaux câblés, mais leur compatibilité avec ces derniers permet également de les y ajouter comme extensions.

L'utilisation de la radio dans les communications introduit un certain nombre de différences par rapport aux communications sur câble. Une communication sans fil permet de faire communiquer deux entités entre elles sans lien physique, par des ondes radio. Le spectre radio, et par conséquent la capacité disponible pour l'accès radio, est généralement limité par la réglementation. Contrairement aux communications filaires où une population et une demande en capacité de plus en plus importantes peuvent être desservies par le déploiement de câbles supplémentaires pour connecter les abonnés du réseau, la capacité du spectre radio ne peut être étendue arbitrairement.

Le rayonnement géographique des ondes est relativement limité étant donné la faible puissance d'émission des solutions matérielles actuelles, en WiFi notamment. Pour cette raison, les réseaux sans fil se sont avant tout développés comme réseaux internes, propres à un bâtiment, soit comme réseau d'entreprise, soit comme réseau domestique. Néanmoins, des projets de réalisation de réseaux à grande échelle ont vu le jour. Ainsi, certaines zones urbaines sont couvertes par des MAN sans fil qui sont soit le fait d'entreprises spécialisées comme FON¹, soit d'associations d'individus, par exemple OZONE² à Paris.

La technologie sans fil trouve sa première application en téléphonie mobile

1. FON (<http://www.fon.com/fr>) est la plus grande communauté WiFi au monde. Ses membres partagent leur connexion Internet sans fil chez eux et en échange, ils peuvent se connecter gratuitement sur le point d'accès d'un autre utilisateur, partout dans le monde.

2. OZONE (<http://www.ozoneparis.net/>) construit le Réseau Pervasif, la nouvelle génération de l'Internet. Il vous permettra d'être connecté sans-fil, en Wi-Fi, à haut débit, chez vous et où que vous soyez dans Paris intra-muros.

cellulaire du type GSM. D'autres types de réseaux ont également fait leur apparition. Ils tendent à être auto-configurables et auto-organisables, sans infrastructure, c'est-à-dire qu'il se mettent en place simplement en détectant la présence des nœuds proches à l'aide d'échanges radio. Les nœuds peuvent être mobiles comme dans les réseaux ad-hoc, ou plus ou moins fixes afin de récolter et de transmettre des données environnementales d'une manière autonome comme dans les réseaux de capteurs. A la différence des réseaux de téléphonie cellulaires dans lesquels les utilisateurs passent par une borne, ou point d'accès, afin de communiquer, les réseaux ad-hoc permettent à chaque entité de communiquer directement avec ses voisins. Pour communiquer avec d'autres entités, il lui est nécessaire de faire passer ses données par des nœuds intermédiaires qui se chargeront de les acheminer, formant ainsi un réseau multi-saut.

Les réseaux sans fil sont plus généralement utilisés dans un grand nombre d'applications (militaires, scientifiques, médicales, de secours, ...) et peuvent s'étendre sur plusieurs kilomètres. Ces réseaux occupent désormais une place primordiale dans notre société, et leur déploiement devrait continuer à se démocratiser dans les prochaines années.

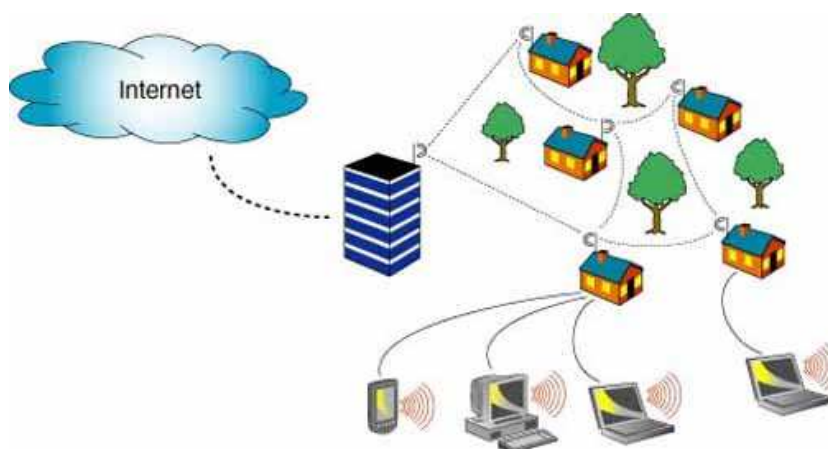


FIGURE 1.1 – Un réseau radio maillé : exemple de réseau sans fil d'infrastructure fournissant un accès à Internet

Le besoin de fournir des solutions robustes et fiables pour les réseaux d'accès à large bande ont permis l'émergence d'un nouveau type de réseaux : les réseaux maillés sans fil, ou réseaux radio maillés (WMNs pour *wireless mesh networks*) (Fig. 1.1). Ces réseaux dynamiquement auto-organisés et auto-configurés comme les réseaux ad-hoc, sont des réseaux d'infrastructure possédant de nombreux

avantages pour les opérateurs, les fournisseurs d'accès à Internet, les entreprises, les collectivités, les services d'urgences, et même les particuliers. En effet, les opérateurs cherchent avant tout à assurer une connectivité omniprésente, à moindre coût de déploiement et d'entretien, et nécessitant une maintenance facile et minimale. De leurs côtés, les clients veulent pouvoir se connecter facilement aux services quand ils le souhaitent et quelque soit l'endroit où ils se trouvent. Ils souhaitent accéder de manière rapide à ce qu'ils demandent, sans devoir installer des logiciels spéciaux pour la connexion aux services. En ce sens, les réseaux radio maillés sont des réseaux dits *ubiquitaires*, ou omniprésents, qui offrent une solution peu coûteuse de déploiement, une maintenance facile, et une couverture importante et facilement extensible.

Les réseaux radio maillés déployés sur une zone métropolitaine (i.e. un MAN maillé sans fil) possèdent de nombreux avantages. Le niveau de transmission de la couche physique d'un nœud dans un réseau radio maillé est beaucoup plus importante que dans n'importe quel réseau cellulaire. Par exemple, nous verrons dans la Section 1.1.1 qu'un routeur WiFi peut transmettre à un taux de 54 Mbit/s. De plus, les communications entre deux nœuds du réseau radio maillé ne transite pas par un réseau filaire. En comparaison aux MAN filaires, un MAN maillé sans fil représente une alternative économique avantageuse pour des connexions haut-débit, en particulier dans des régions en voie de développement où le coût de déploiement de lignes câblées ou de fibres optiques est trop important. Il permet de couvrir une zone potentiellement plus grande qu'une maison, une entreprise, un immeuble, ou une communauté de réseaux *hot spots*. La nécessité de passage à l'échelle est donc une caractéristique plus importante que dans les autres types de réseaux.

La révolution occasionnée par l'apparition des réseaux sans fil a entraîné une expansion des recherches dans le domaine des réseaux de télécommunications. Cet accroissement est lié à l'apparition de nouvelles applications, mais également parce que ce domaine est un lieu de convergence et d'interaction entre les différentes technologies et disciplines scientifiques. Les mathématiques se mêlent à la physique, et bien sûr l'informatique. Dans ce contexte, nous nous intéressons à l'optimisation des réseaux radio maillés qui peut se voir à la frontière des mathématiques discrètes et de l'informatique.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la modélisation théorique de problèmes d'optimisation des réseaux radio maillés, et non au développement de protocole et de simulation en pratique. La modélisation permet de fournir des modèles mathématiques et donner des solutions optimales aux problèmes, ou des

bornes sur les performances du réseau. Cette modélisation est très importante afin de mettre en évidence les contraintes liées à ce type de réseau et proposer des solutions donnant de bons résultats théoriques afin de les adapter et de développer de nouveaux protocoles en pratique.

Un plan détaillé de cette thèse contenant le détail des résultats obtenus est présenté dans la Section 1.4. Avant cela, nous étudions de manière détaillée les réseaux radio maillés dans la Section 1.1, en décrivant les technologies radio existantes qui sont utilisées dans ce type de réseau, ainsi que la notion de capacité qui est au centre de notre étude. Nous présentons également les principaux outils utilisés dans les travaux de cette thèse : la programmation linéaire pour la modélisation des problèmes (Section 1.2), et la bibliothèque MASCOPT pour l'implémentation et la résolution des modèles (Section 1.3).

1.1 Les réseaux radio maillés

Les réseaux radio maillés ont connu un essor important ces dernières années [AWW05, HLMP06]. Ils ont l'avantage de satisfaire à la fois les exigences des fournisseurs d'accès et des utilisateurs comme décrit précédemment. Ils ont principalement été développés en milieu urbain afin de fournir un accès Internet sur une zone de couverture importante. En mars 2009, quelques 250 villes américaines ont déjà choisi les réseaux maillés sans fil pour équiper leurs services d'urgence et leurs systèmes de communications mobiles³. Une approche similaire des réseaux ouvre des perspectives très importantes pour les communications militaires, notamment en mission de combat dans le contexte de la Bulle Opérationnelle Aéroterrestre, ou d'assistance aux civils lorsque les infrastructures de télécommunications sont détruites.

Ces réseaux ubiquitaires émergents sont constitués de différents niveaux interagissant entre eux. Les clients du réseau radio maillé sont mobiles dans la zone à couvrir, et ils se connectent à l'infrastructure fixe du réseau, c'est-à-dire au routeur sans fil le plus proche, comme pour des réseaux cellulaires ou des *hot spots*. Le deuxième niveau est un ensemble auto-organisé de routeurs sans fil inter-connectés par des liens radio, appelé *backhaul*, dont le but est de collecter le trafic des clients. Parmi ces routeurs, certains possèdent la fonctionnalité

3. La liste des villes américaines équipées de réseaux radio maillés est disponible et régulièrement mise à jour sur le site <http://www.muniwireless.com/>.

supplémentaire d'être reliés à un réseau supérieur, filaire ou non, fournissant par exemple un accès direct à Internet ou à des données répertoriées dans un centre de contrôle militaire dans le cadre d'actions de terrain. Ces routeurs spéciaux sont plus précisément appelés *points d'accès*, ou *passerelles*, comme indiqué sur la Figure 1.2. Les clients accèdent donc aux applications gérées par le réseau supérieur à travers l'infrastructure fixe du réseau radio maillé en envoyant et recevant des requêtes relayées sur plusieurs sauts.

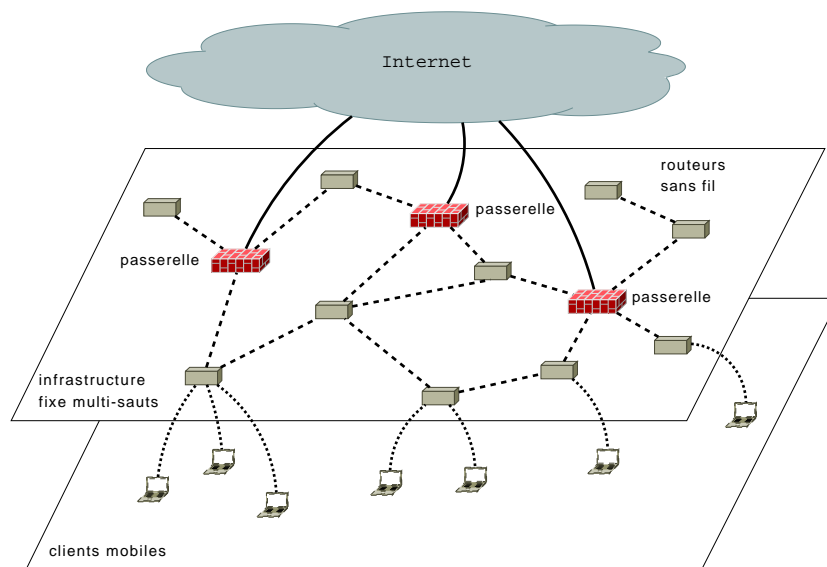


FIGURE 1.2 – Architecture à deux niveaux d'un réseau radio maillé

Ce type de réseau introduit de nouvelles notions d'optimisation. En effet, compte tenu de l'architecture hétérogène des réseaux radio maillés, il faut à la fois permettre le déploiement d'une infrastructure suffisamment dense pour supporter le trafic des usagers, tout en limitant le coût induit par le placement des bornes et des points d'accès. De nombreuses problématiques existent pour ces réseaux auxquels il est difficile d'appliquer les recherches existantes. En effet, contrairement aux réseaux ad-hoc sans fil dans lesquels le trafic est généré entre n'importe quelle paire de nœuds dans le réseau, le trafic d'un réseau radio maillé se fait principalement en direction ou depuis les passerelles. Des contraintes supplémentaires apparaissent donc afin de gérer au mieux cette congestion, en répartissant la charge de trafic équitablement entre les points d'accès.

1.1.1 Technologie

La norme WiFi IEEE 802.11 est un standard international décrivant les caractéristiques d'un réseau local sans fil très utilisée de nos jours [80207]. Dans la pratique, le WiFi permet de relier des ordinateurs portables, des ordinateurs de bureau, des assistants personnels (PDA) ou tout type de périphérique à une liaison haut débit (11 Mbit/s (802.11b), 54 Mbit/s (802.11g), et même entre 100 et 200 Mbits/s avec le projet de norme 802.11n) sur un rayon de plusieurs dizaines de mètres en intérieur (généralement entre une vingtaine et une cinquantaine de mètres), à plusieurs centaines de mètres en environnement ouvert.

La norme 802.11 s'attache à définir les couches basses du modèle de réseau OSI pour une liaison sans fil utilisant des ondes électromagnétiques, c'est-à-dire :

- la couche physique (notée parfois couche PHY), proposant trois types de codages de l'information ;
- la couche liaison de données, constitué de deux sous-couches : le contrôle de la liaison logique (Logical Link Control, ou LLC) et le contrôle d'accès au medium radio (Media Access Control, ou MAC).

La couche MAC gère le partage des ressources à travers une méthode d'accès au canal radio. Dans un réseau local filaire classique Ethernet, une méthode d'accès très répandue est le protocole CSMA/CD (*Carrier Sense Multiple Access with Collision Detection*), dans lequel chaque machine est libre de communiquer à n'importe quel moment. Une station envoyant un message vérifie qu'aucun autre message n'a été envoyé en même temps par une autre machine. Si c'est le cas, les deux machines patientent pendant un temps aléatoire choisi indépendamment avant de recommencer à émettre. Dans un environnement sans fil ce procédé n'est pas possible dans la mesure où une station, lorsqu'elle émet, est incapable d'écouter simultanément le canal, mais également parce que deux stations communiquant avec un récepteur ne s'entendent pas forcément mutuellement en raison de leur localisation. Pour contourner cet écueil, la norme WiFi propose un protocole similaire appelé CSMA/CA (*Carrier Sense Multiple Access with Collision Avoidance*). Le protocole CSMA/CA utilise un mécanisme d'esquive de collision basé sur un principe d'échange d'accusés de réception réciproques entre l'émetteur et le récepteur, présenté sur la Figure 1.3. La station voulant émettre écoute le canal radio. Si celui-ci est encombré, la transmission est différée. Dans le cas contraire, si le média est libre pendant un temps donné (appelé DIFS pour *Distributed Inter Frame Space*), alors la station peut émettre. Elle transmet alors un message appelé *Request To Send* (noté RTS signifiant "demande à émettre")



Les protocoles développés pour la norme 802.11 en mode ad-hoc sont insuf-

fisants pour les réseaux multi-sauts et les réseaux maillés, principalement à cause d'un manque d'extensibilité dans le protocole MAC, ce qui entraîne des mauvaises performances du réseau. Un groupe de travail a été formé afin de développer récemment un nouveau standard, IEEE 802.11s [MSHD07]. Ce standard a pour but de redéfinir les couches physique et MAC pour les réseaux radio maillés afin d'étendre la couverture et assurer des communications point-multipoint (*broadcast/multicast*) et point-à-point (*unicast*) dans des topologies multi-sauts auto-configurées.

Le standard WiMax (*Worldwide Interoperability for Microwave Access*, ratifié par l'IEEE sous le nom 802.16, est une norme de réseau sans fil principalement développée pour les réseaux métropolitains[80209]. Son objectif est de fournir une connexion Internet à haut débit (de l'ordre de 70 Mbit/s) sur une zone de couverture de plusieurs kilomètres de rayon. Le standard WiMax possède l'avantage de permettre une connexion sans fil entre une station de base et des milliers d'abonnés sans nécessiter de ligne visuelle directe. Dans la réalité le WiMax ne permet de franchir que des petits obstacles tels que des arbres ou une maison mais ne peut en aucun cas traverser les collines ou les immeubles. Un autre de ses avantages est de permettre une réservation de bande-passante pour un usage donné, ce qui garantit une Qualité de Service aux clients en particulier pour les applications de voix sur IP (VoIP).

Le cœur de la technologie WiMax est la station de base, c'est-à-dire l'antenne centrale chargée de communiquer avec les antennes d'abonnés (les routeurs). Nous parlons ainsi de liaison point-multipoint. L'utilisation en mode point à point existe également en WiMax, mais nous ne le considérons pas dans cette thèse. Le WiMax est utilisé comme réseau de collecte entre des réseaux locaux sans fil, utilisant par exemple le standard WiFi. La version courante du standard possède néanmoins quelques limites, en particulier, comme pour 802.11, l'extensibilité est limitée : seule une centaine de clients peuvent accéder au réseau à cause de la propriété centralisée de l'accès au canal. Des groupes de travail cherchent à développer la synchronisation, la sélection des liens, et améliorer l'interdépendance entre les protocoles MAC et de routage. A terme, WiMax (ou la norme très similaire LTE pour *Long Term Evolution* développée pour les réseaux mobiles de 4ème génération) pourra faire partie intégrante des réseaux radio maillés.

1.1.2 Une mesure de performances : la capacité

Le concept de capacité dans les réseaux radio vient de la mesure de la bande passante disponible sur chacun des liens. De nombreuses définitions ont été données de cette capacité. Comme les liens radio ne sont pas indépendants entre eux, le paramètre clé devient la quantité totale de trafic que le réseau est capable de relayer. Cette quantité peut alors être exprimée en fonction de différents paramètres comme par exemple en unité de temps, à travers un canal ou un réseau de canaux, ou en unité de flot entre des sources et des destinations données. Dans cette thèse, nous définissons la capacité en fonction du flot, ce qui correspond à la définition utilisée entre autre dans l'article pionnier en matière d'étude de la capacité des réseaux radio [GK00, KIR08].

Les avantages de l'étude de la capacité sont nombreux. Pour un opérateur, obtenir une meilleure capacité permet non seulement d'obtenir des solutions plus efficaces, c'est-à-dire assurer une meilleure qualité de service aux clients, mais également d'offrir ses services à un nombre plus important d'utilisateurs, ce qui accroît les bénéfices. Pour des applications militaires, des cryptages plus robustes des communications deviennent possibles lorsque la capacité est importante. De même, le routage et la notion de capacité sont clairement reliés : les performances d'un protocole de routage peuvent être grandement améliorées si la capacité qui en résulte peut être déterminée. La capacité fournit une borne supérieure sur les résultats d'une heuristique, ce qui permet également d'en juger la qualité.

Malheureusement, la capacité des réseaux radio est affectée par de nombreux facteurs comme la topologie du réseau, le modèle de trafic, le partage des ressources, et les interférences radio. En effet, le problème majeur des réseaux radio est la présence d'interférences spatiales entre les communications. Une conséquence directe de ces interférences est la chute de la capacité [JPPQ03, KN05]. Dans ces conditions, la capacité est devenue une mesure des performances des réseaux radio très étudiée dans la littérature.

L'étude de la capacité des réseaux radio a débuté avec l'article de Gupta et Kumar [GK00], dans lequel les auteurs réalisent une étude asymptotique de la capacité en fonction de la densité du réseau. Ils ont montré que la capacité d'un nœud dans un réseau ad-hoc sans fil aléatoire décroît en $\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{n}})$ lorsque la taille du réseau, n , augmente. Ce résultat, prouvé dans des conditions idéales, a été confirmé par de nombreux travaux [DFTT04, MPR06]. Une autre étude asymptotique de la capacité à chercher à montrer que, à la différence des réseaux ad-hoc, les réseaux radio maillés possèdent des points d'étranglement localisés autour des

points d'accès où se concentre le trafic [JS03]. Dans ces conditions, la capacité disponible en chaque nœud d'un réseau radio maillé est réduite à $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$. Il est néanmoins possible d'atteindre la même borne que les réseaux ad-hoc dans le cas où le rapport du nombre de points d'accès par rapport au nombre de routeurs est faible [ZWR08, MV06].

A partir de ces résultats analytiques, de nombreux travaux ont cherché à optimiser cette capacité. Généralement, ces travaux se classent en deux catégories : les approches d'optimisation, et les heuristiques. Les modèles d'optimisation, utilisant principalement la programmation linéaire et non linéaire, s'intéressent au calcul de bornes théoriques sur cette capacité [KMPS05, RTV06, KIR08]. Des techniques inter-couche (*cross layer*), c'est-à-dire prenant en compte les interactions entre les différentes couches du modèle de réseau OSI, sont nécessaires. L'efficacité du routage, géré par la couche transport, dépend lui-même d'une allocation performante des ressources, gérée par les couches physique et liaison des données. En effet, les interférences radio doivent conditionner le routage. De même, le routage choisi doit prendre en compte la réussite des transmissions. Comme nous le verrons plus tard, l'inconvénient majeur de ces modèles est qu'ils devient rapidement difficile de les résoudre à l'optimal [WB07]. C'est pourquoi les techniques heuristiques sont également développées afin d'obtenir des résultats aux problèmes d'optimisation qui se rapprochent le plus possible de la solution optimale [ABL05, MR08]. Ces deux approches sont complémentaires puisque les méthodes d'optimisation sont très utiles afin d'évaluer les solutions des heuristiques, et les heuristiques sont une solution rapide permettant d'obtenir des solutions approchées pouvant conduire au développement de protocoles en pratique.

L'axe principal de cette thèse concerne le développement de modèles d'optimisation génériques afin de maximiser la capacité du réseau radio maillé et fournir des bornées théoriques sur ces performances. Les modèles que nous avons développés sont plus précisément introduits dans la Section 1.4.

1.2 La programmation linéaire

La programmation linéaire, dont [Chv83] est l'un des livres références, constitue une branche des mathématiques appliquées s'intéressant aux problèmes d'optimisation d'une fonction f linéaire appelée *fonction objectif*, c'est-à-dire pouvant s'écrire de la forme suivante : $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, où $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur donc chaque composant c_i est

un nombre réel, et $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ est le vecteur des n variables réelles du programme appartenant au domaine de définition de la fonction. Ces variables doivent, de plus, satisfaire un certain nombre de contraintes elles aussi linéaires. Les contraintes délimitent un espace de solutions réalisables de \mathbb{R}^n , appelé *polyèdre*, qui correspond à l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces affines bordés par des hyperplans. Le plus souvent, les polyèdres considérés sont bornés car les variables de nos problèmes le sont en pratique. Dans ce cas, des arguments de compacité permettent de prouver que le polyèdre est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de sommets, appelés *points extrémaux*. Ces sommets sont les points du polyèdre qui ne sont pas combinaison linéaire d'autres points. Un résultat fondamental en programmation linéaire indique que l'optimum d'un programme linéaire est atteint en au moins un point extrême du polyèdre. Un tel polyèdre est appelé un *polytope*.

Un exemple concret de programmation linéaire sur \mathbb{R}^2 est maintenant présenté. Soit le programme linéaire de maximisation suivant :

$$\begin{aligned}
 & \max \quad z = x_1 - x_2 \\
 \text{s.c.} \quad & 3x_1 - 2x_2 \leq 60 & (C1) \\
 & -6x_1 + x_2 \leq 0 & (C2) \\
 & 2x_1 - 12x_2 \leq -120 & (C3) \\
 & 2x_1 + 3x_2 \leq 180 & (C4) \\
 & x_i \geq 0
 \end{aligned}$$

Le polytope des solutions délimité par les contraintes (C1) – (C4) est représenté sur la Figure 1.4 par la zone grisée. Dans cet exemple, le polytope est en fait un polygone délimité par des droites. La solution se détermine en traçant la fonction objectif pour une certaine valeur (par exemple 0 sur la figure), et glisse jusqu'à la frontière du domaine réalisable en fonction de l'objectif (minimiser ou maximiser). La solution optimale se trouve alors sur un sommet du polygone, dans l'exemple il se situe sur le point (30, 15) donnant une valeur optimale $z^* = 15$.

Plus formellement, un problème en programmation linéaire peut se restreindre à un problème de maximisation (dans le cas d'une minimisation, il est équivalent de chercher à maximiser l'opposé de la fonction objectif), noté de la manière suivante : $LP \equiv \max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^{+n}\}$. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice dont chaque ligne contient les n coefficients de l'équation directrice de l'un des m hyperplans définissant les contraintes du programme, i.e. le polyèdre. $b \in \mathbb{R}^m$ est

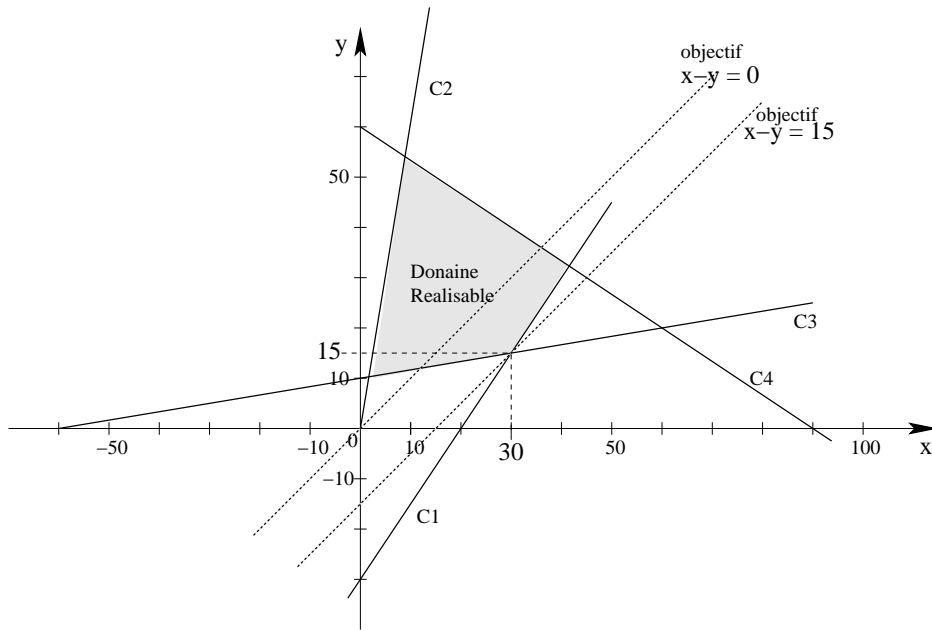


FIGURE 1.4 – Exemple de programme linéaire en dimension 2.

le vecteur des m constantes affines de ces hyperplans. Cette notation est appelée *notation matricielle* du programme linéaire.

Sous ce formalisme, l'exemple de la Figure 1.4 a pour paramètre :

$$c^T = (1, -1), \quad b = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ -120 \\ 180 \end{pmatrix}, \quad \text{et } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 1 \\ 2 & -12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Notons qu'une borne inférieure de la valeur optimale de la fonction objectif du programme LP peut se trouver en extrayant une solution réalisable, i.e. située dans le polyèdre, du programme. La dualité nous permet maintenant d'en extraire une borne supérieure.

1.2.1 La dualité

La dualité est une notion fondamentale de la programmation linéaire [Chv83]. Etant donné le programme LP en notation matricielle défini dans la section ci-dessus, le programme linéaire *dual* associé est le suivant : $\min\{b^T y \mid A^T y \geq c, y \in \mathbb{R}^{+m}\}$. A , b , et c sont les mêmes matrice et vecteurs que dans le pro-

gramme LP , et $y \in \mathbb{R}^{+m}$ est un vecteur donc chaque composant y_i correspond à un coefficient associé à la i ème contrainte de LP . Dans l'exemple précédent de la Figure 1.4, le programme dual associé est le suivant :

$$\begin{aligned} & \min 60y_1 - 120y_3 + 180y_4 \\ \text{s.c. } & 3y_1 - 6y_2 + 2y_3 + 2y_4 \geq 1 & (D1) \\ & -2y_1 + y_2 - 12y_3 + 3y_4 \geq -1 & (D2) \\ & y_j \geq 0 & (D3) \end{aligned}$$

Etant donnée une solution réalisable x de LP , et une solution réalisable y du programme dual, nous obtenons les inégalités suivantes :

$$b^T y = y^T b \geq y^T (Ax) = (y^T A)x = (A^T y)x \geq c^T x.$$

La solution du programme dual représente donc une borne supérieure du programme LP initial, appelé programme *primal*. D'après la notation matricielle, il est facile de voir que le programme dual du dual est le primal : $dual(dual) \equiv primal$ (Figure 1.5). Enfin, les variables du programme primal (respectivement dual), sont familièrement appelées *variables primales* (resp. *duales*).

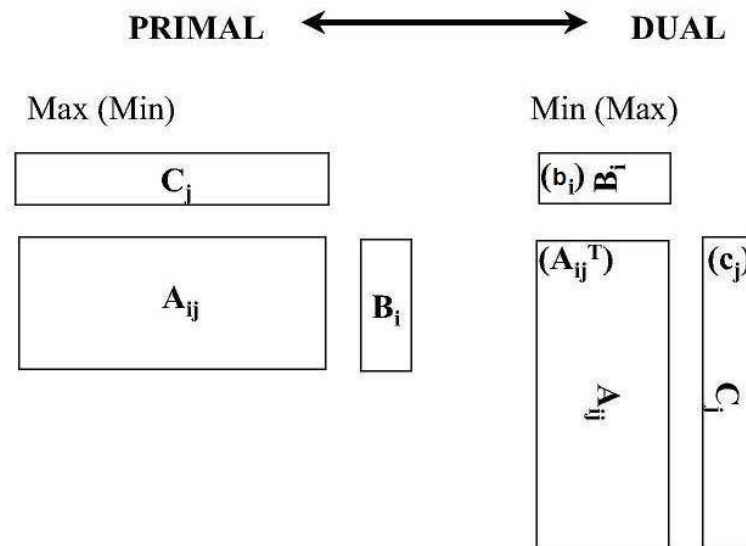


FIGURE 1.5 – Correspondances entre les formulations primales et duales.

Cette inégalité entre les valeurs des fonctions objectifs des programmes mène

à l'énoncé d'un théorème fort en programmation linéaire concernant les conditions de l'égalité.

Théorème 1.1 *Si le programme linéaire primal possède une solution optimale x^* , alors le programme dual possède également une solution optimale y^* , et les valeurs des fonctions objectifs à l'optimal coïncident : $c^T x^* = b^T y^*$.*

Différentes preuves de ce théorème existent dans la littérature [Chv83, Sch98]. Son intérêt principal réside dans le développement de méthodes de résolution dites *primal/dual* dans lesquelles les variables *duals* guident à la construction d'une solution du primal comme nous le verrons dans le Chapitre 4. D'un point de vue complexité, le théorème 1.1 montre l'équivalence entre l'optimisation du primal et celle du dual. Un problème d'optimisation peut alors être vu sous deux angles différents : si le primal a n variables et m contraintes, le dual a lui m variables et n contraintes. Il peut être alors préférable de chercher à optimiser le programme qui possède moins de variables que de contraintes.

Ce résultat peut également être couplé au résultat de la section suivante, dans laquelle nous présentons un théorème très important pour le processus de génération de colonnes que nous verrons dans la Section 3.3 où une séparation du programme dual permet d'obtenir des résultats de complexité.

1.2.2 Séparation = Optimisation

Lorsque le nombre de contraintes d'un programme linéaire est trop important, notamment exponentiel en la taille du problème, il n'est pas possible de décrire de manière simple le polyèdre des solutions. Un bon exemple de ce cas est la formulation *arc/chemin* du problème du multiflot présentée dans la Section 3.1.1. Le problème de *séparation* consiste alors à trouver un hyperplan qui sépare un ensemble convexe (et en particulier un polytope) d'un point hors de cet ensemble, c'est-à-dire tel que le point se trouve dans l'un des deux demi-espaces affines délimités par l'hyperplan, et l'ensemble convexe dans l'autre. Le point hors du polyèdre ne vérifie pas, par définition, l'ensemble des contraintes du programme linéaire. Le problème de la séparation consiste donc à trouver une contrainte violée du programme, correspondant à l'hyperplan séparateur. En d'autres termes il peut se voir comme un oracle de description implicite du polyèdre.

Le théorème important **Sep = Opt** est une conséquence de la méthode de l'ellipsoïde. Il constitue un résultat majeur en optimisation combinatoire, qui fait le lien entre les problèmes de séparation et d'optimisation. Ce résultat établit

l'équivalence, du point de vue de la complexité algorithmique, entre optimiser et séparer sur un même polyèdre.

Théorème 1.2 (Sep=Opt [GLS81]) *Il existe un algorithme polynomial pour résoudre le problème de séparation sur un polyèdre \mathcal{K} si et seulement s'il existe un algorithme polynomial pour résoudre le problème d'optimisation sur \mathcal{K} .*

La preuve utilise l'algorithme de l'ellipsoïde pour montrer que l'oracle de séparation permet de décider en un nombre polynomial d'étapes si le polyèdre est vide ou non.

L'application de ce théorème qui nous intéresse concerne le processus de génération de lignes ou de colonnes. Ces processus s'appliquent à des problèmes où l'un des deux programmes (primal ou dual) possède un nombre exponentiel de contraintes. Le théorème 1.2 certifie alors qu'il est possible d'optimiser ce programme linéaire en temps polynomial si et seulement si nous sommes capables de trouver en temps polynomial une contrainte violée par un point infaisable (hors du polytope), dans le cas où le polytope est bien défini. Ce résultat est particulièrement intéressant dans le cas de la génération de lignes ou de colonnes que nous verrons plus tard dans les Chapitres 3 et 4, dans laquelle les programmes auxiliaires cherchent à calculer des nouveaux objets combinatoires, associés à des variables ou des contraintes, qui violent les contraintes du programme dual ou primal. Le théorème 1.2 permet alors de certifier, lorsque les programmes auxiliaires ne génèrent plus de lignes ou de colonnes, que nous avons atteint l'optimum du programme linéaire.

1.3 La bibliothèque MASCOPT

MASCOPT (contraction de MASCOTTE et *optimisation*) est une bibliothèque *open source* JAVA dédiée aux problèmes d'optimisation dans les graphes et les réseaux [LSV04]. Son développement a débuté en 2001, principalement au cours de la thèse de Jean-François Lalande [Lal04], et se poursuit aujourd'hui encore. La bibliothèque est conçue dans l'esprit des modèles orientés objet et privilégie l'accessibilité et la facilité d'utilisation plutôt que la vitesse d'exécution des programmes : le modèle doit rester générique et doit tirer parti d'une conception objet soignée pour faciliter son utilisation ultérieure. De nombreuses bibliothèques de graphes et de réseaux existent sur le marché et possèdent toutes des fonctionnalités bien identifiées. Ces bibliothèques ne reposent pas toujours sur le même objectif

fonctionnel ; nous pouvons par exemple distinguer une bibliothèque encodant un modèle de graphe au sens mathématique d'une bibliothèque de dessin de graphes. Le modèle interne est différent et les fonctionnalités proposées sont orientées par le type d'utilisation visé. MASCOPT offre, quant à elle, l'implémentation d'un modèle générique de graphes contrairement à la plupart des bibliothèques existantes, focalisées sur le problème à résoudre pour lequel elles ont été développées.

MASCOPT est une bibliothèque open source déposée à l'APP⁴ et dont l'objectif général est de fournir les modèles et outils nécessaires à l'implémentation d'algorithmes d'optimisation dans les réseaux. Dans ces problèmes, et comme nous le rappellerons tout au long de cette thèse, les réseaux et les requêtes sur ces derniers sont en général modélisés par des graphes. Dans MASCOPT, ces graphes peuvent ensuite être manipulés afin de leur appliquer facilement des algorithmes de théorie des graphes. Enfin, comme MASCOPT est open source et écrit en JAVA, il devient alors très simple de réaliser des appels vers d'autres bibliothèques externes, d'autres classes JAVA déjà définies et même des bibliothèques compilées en C++. Dans cette thèse, nous interfaçons MASCOPT avec CPLEX SOLVER D'ILOG qui est un outil commercial très utilisé pour résoudre des programmes linéaires. Nous avons ainsi pu résoudre nos programmes linéaires, mais nous avons également enrichi MASCOPT des méthodes de résolution sophistiquées utilisées, à savoir la génération de colonnes et la génération croisée de lignes et de colonnes.

1.4 Plan détaillé

Dans le **chapitre 2**, nous présentons une modélisation inter-couche des caractéristiques des réseaux radio maillés. Un état de l'art sur les différents modèles de réseau, des hypothèses de fonctionnement, et des modèles d'interférence est présenté. Nous définissons les choix de modélisation que nous avons fait et proposons un modèle linéaire pouvant s'appliquer à différents problèmes d'optimisation des réseaux radio maillés comme le placement de points d'accès dans le réseau, le routage, et l'ordonnancement des communications. Nous concluons en mettant en évidence la complexité du problème pour lesquels le besoin d'une modélisation structurelle et algorithmique plus pertinente est nécessaire. Ces travaux ont fait l'objet des publications [GMRR07b, GMRR07a, GMR08].

4. Agence pour la Protection des Programmes. MASCOPT est identifié électroniquement par un numéro Inter Deposit Digital Number at Program Protection Agency en 2004 : IDDN.FR.001.100002.000.S.P.2004.000.31235.

Le **chapitre 3** est consacré à la proposition et validation d'un modèle pour le routage et l'ordonnancement dans les réseaux radio maillés fondé sur des structures combinatoires plus complexes. Nous mettons en avant la notion d'ensemble de transmissions radio compatibles dans le réseau. Nous modélisons ces ensembles à partir de la structure d'ensembles indépendants dans le graphe des conflits et obtenons une formulation en chemin/*round* pour le problème joint du routage et de l'ordonnancement dans les réseaux radio maillés. Après avoir défini la relaxation de ce problème permettant de se restreindre à la capacité allouée à chacun de ces ensembles indépendants, nous dérivons une méthode de résolution efficace basée sur le processus de génération de colonnes. Ces travaux ont fait l'objet des publications [MPR08a, MPR08b].

En théorie des graphes, des liens forts lient la valeur d'un flot maximum et la capacité d'une coupe minimum dans un réseau. En adaptant cette propriété au contexte radio, nous présentons dans le **chapitre 4** une formulation en programmation linéaire qui s'intéresse à la capacité de transport disponible sur les coupes d'un réseau radio maillé. Nous montrons l'équivalence des solutions optimales de cette formulation avec celles du problème présenté dans le chapitre précédent. Un algorithme primal-dual utilisant le processus de génération croisée de lignes et de colonnes permet de résoudre efficacement le problème de couverture des coupes étudié. Les résultats découlant de ce modèle fournissent des indications intéressantes quant aux contraintes topologiques du réseau qu'il est nécessaire et suffisant d'optimiser afin d'obtenir une capacité maximale. Ces travaux ont fait l'objet des publications [MPPR08a, MPPR08b].

Une application directe des modèles présentés dans les chapitres précédents est étudiée dans le **chapitre 5**. L'implémentation de ces modèles permet d'effectuer une étude quantitative sur les effets des accusés de réception sur la capacité des réseaux radio maillés. Deux modèles technologiques sont comparés suivant la couche qui gère l'envoi de ces accusés de réception : soit la couche MAC utilisant la méthode d'accès aléatoire au canal CSMA/CA dans la norme IEEE 802.11, soit la couche transport dans un modèle de blocs d'acquittements qui sont routés dans le réseau, comme cela peut être intégré dans la norme IEEE 802.16. Ces travaux ont fait l'objet des publications [MV08, MV09] en collaboration avec Marie-Emilie Voge⁵.

5. Equipe Projet POPS, IRCICA/LIFL, Univ. Lille 1, CNRS UMR 8022, INRIA Lille Nord-Europe, Lille, France.

Le **chapitre 6** présente un algorithme distribué de gradient local permettant de transmettre depuis des sources vers des destinations des paquets introduits dans le réseau au cours du temps. Cette étude est motivée par la considération d'un trafic dynamique dans les réseaux, et l'objectif est de prouver la stabilité du réseau, c'est-à-dire que le nombre de paquets en transit dans le réseau reste borné au cours du temps. Notre algorithme glouton n'utilise que des informations locales sur le voisinage de chaque nœud pour les transmissions des paquets. Il permet de prouver la stabilité du réseau dans le cas où tous les liens peuvent transmettre simultanément, et lorsque le nombre de paquets injectés à un temps donné aux sources du réseau est inférieur *ou égal* à la valeur d'un flot maximum dans le réseau.

Dans cette thèse, nous avons non seulement modélisé les différents problèmes d'optimisation à l'aide de la programmation linéaire, mais les méthodes de résolution utilisées (génération de lignes et de colonnes) ont toutes été implémentées en JAVA afin d'enrichir la bibliothèque d'optimisation de graphes MASCOPT. Ainsi, tout problème pouvant se résoudre par génération de lignes ou de colonnes peut utiliser le code que nous avons développé.

Modèles combinatoires pour les réseaux radio maillés

Le contexte technologique qui nous motive soulève des problématiques d'optimisation nouvelles. Il faut notamment trouver un compromis entre le nombre de points d'accès à installer et la capacité disponible pour relayer les connexions des usagers vers ces points d'accès. Dans un tel système, il faut choisir pour chaque nœud son placement et sa zone de couverture en prenant en compte les contraintes de brouillage entre les zones et la densité supposée d'utilisateurs. Il faut de plus assurer une bonne connectivité entre les routeurs pour assurer une flexibilité suffisante à la gestion des pannes et des variations de trafic.

Dans ce chapitre, nous présentons la modélisation des caractéristiques intercouche du réseau sur laquelle nous nous appuyons afin d'aborder les différents problèmes d'optimisation des réseaux radio maillés. Notre objectif est d'obtenir des solutions optimales, i.e. des bornes théoriques, en matière de conception et fonctionnement du réseau, ce qui permet certains choix de modélisation.

Différents problèmes d'optimisation ont été étudiés dans la littérature. Dans un réseau radio maillé, chaque point d'accès collecte le trafic d'une partie du réseau ; deux régions rattachées à des points d'accès suffisamment distants n'interférant entre elles qu'à la frontière. L'influence du placement des points d'accès dans le réseau sur ses performances, ainsi que le routage concentrant le trafic vers ces points d'accès tout en minimisant les interférences radio, sont donc des axes de recherche importants.

Dans la suite du chapitre, nous développons un modèle d'optimisation mêlant l'ensemble de ces aspects afin d'obtenir des solutions optimales au problème de déploiement et fonctionnement du réseau assurant une certaine qualité de service. Nous nous intéressons au problème joint du placement de points d'accès dans le réseau, du routage et de l'ordonnancement des transmissions afin d'optimiser les performances du réseau, réduire les coûts d'installation et de fonctionnement, et assurer une qualité de service minimale aux utilisateurs du réseau.

2.1 Modèle de communication radio

Le but d'un réseau de télécommunications est de permettre l'échange ou la diffusion d'informations entre plusieurs entités. Ces échanges dépendent des caractéristiques du réseau, et obéissent à certaines règles, notamment l'accès au canal pour le partage des ressources. Ces règles sont dictées par le modèle de communication choisi qui modélise les échanges dans le réseau. Les notions les plus importantes à considérer pour définir un modèle de communication sont la connectivité, i.e. les communications directes entre deux entités, et les conflits, prenant en compte la diffusion du signal radio et régissant le multiplexage spatial.

Un état de l'art des différents modèles existant dans la littérature est présenté dans les sections suivantes. Nous définissons parallèlement le choix qui a été fait pour la modélisation des caractéristiques inter-couche du réseau radio maillé.

2.1.1 Un lien radio

Le canal de transmission radio est sans conteste l'un des médias de communication les plus variables et les plus incontrôlables. Les ondes radioélectriques, parce qu'elles se propagent en traversant l'espace, sont sujettes à de nombreuses irrégularités comme par exemple les irrégularités de morphologie, de caractéristiques électromagnétiques, de température, ou d'humidité du milieu traversé. C'est pour cela que, contrairement aux transmissions sur lien fixe (câble en cuivre, fibre optique par exemple) où les caractéristiques du milieu sont bien contrôlées, les transmissions sur lien radio ont pour propriété de fluctuer en temps et en espace, souvent avec des variations très importantes.

En parcourant le trajet entre l'émetteur et le récepteur, le signal transmis est sujet à de nombreux phénomènes dont la plupart ont pour effet de dégrader la qualité du signal. Cette dégradation se traduit en pratique par des pertes de capacité et des erreurs dans les messages reçus qui entraînent des pertes d'informations pour l'utilisateur ou le système. Les dégradations du signal peuvent être classées en différentes catégories dont les principales sont :

- les pertes de propagation dues à la distance parcourue par l'onde radio, ou affaiblissement du parcours (*pathloss*),
- les atténuations de puissance du signal dues aux effets d'ombres (*shadowing*) provoqués par les obstacles rencontrés par le signal sur le trajet entre l'émetteur et le récepteur,
- les évanouissements (*fading*) dans la puissance du signal dus aux effets in-

- duits par le phénomène de multi-sauts,
- les brouillages dus aux interférences (sur un même canal ou entre deux canaux adjacents) créés par d’autres émissions,
- les brouillages dus au bruit ambiant (distingué des interférences car pouvant provenir d’autres systèmes par exemple).

Modéliser correctement le comportement du canal radio est bien entendu très complexe. Il existe un nombre important de modèles dans la littérature. Nous en décrivons ici les principaux, avant de définir le modèle choisi dans la suite de cette thèse.

La bonne réception d’un paquet exige que le nombre d’erreurs de transmission soit toujours inférieur à la capacité de correction du code canal utilisé (s’il en existe un). Dans le cas d’un canal Gaussien ou AWGN (*Additive White Gaussian Noise*), le taux d’erreur de transmission est directement lié au rapport signal à bruit (SNR).

Définition 2.1 (SNR) *La qualité d’une transmission d’un nœud u vers un nœud v est mesurée par le ratio signal sur bruit en v défini de la manière suivante :*

$$SNR_v = 10 \log_{10} \frac{P(\text{signal})}{P(\text{bruit})} \quad (dB)$$

où $P(\text{signal})$ représente la puissance du signal envoyé, et $P(\text{bruit})$ celle du bruit.

La puissance du signal reçu en un nœud dépend en général de la puissance de transmission du signal par l’émetteur P_u et de l’atténuation en fonction de la distance entre l’émetteur et le récepteur. Cette atténuation est caractérisée par une fonction H telle que $H(u, v) \rightarrow 0$ lorsque $d(u, v) \mapsto \infty$, où $d(u, v)$ est la distance euclidienne entre u et v . Le plus souvent, $H(u, v) = \frac{1}{d(u, v)^\alpha}$, où α est un coefficient d’atténuation qui dépend du canal radio et du matériel utilisé (généralement $\alpha \geq 2$). L’intensité du bruit dépend en grande partie du bruit ambiant, mais également des autres signaux alentours pouvant provenir de communications simultanées comme nous le verrons plus précisément dans la Section 2.1.3.

Chaque nœud a donc une certaine probabilité de recevoir le message, cette probabilité tendant vers 0 à l’infini. En prenant en compte cette réalité, la notion de seuil n’existe pas, et la probabilité de réception suit une loi fonction de la distance entre les deux nœuds communicants.

Au contraire, de nombreux modèles dits à seuil existent, c’est-à-dire que la communication est considérée réussie si le SNR du receveur dépasse un certain

seuil γ . En dessous de ce seuil, le receveur ne peut pas décoder correctement le signal reçu et la transmission échoue. Cette hypothèse de seuil de réception est justifiée par la théorie de l'information qui nous dit qu'il est toujours possible, en appliquant un bon codage du canal, d'obtenir un modèle à seuil. En effet, plus la taille du codage est importante, plus la loi de PER (Packet Error Rate) se rapproche du modèle à seuil isotrope [KKS04].

Dans la majorité des études actuelles portant sur les réseaux multi-sauts, les modèles pris en compte pour la couche physique sont des modèles en distance, correspondant à une approximation du modèle à seuil. Nous considérons des routeurs sans fil possédant une antenne radio omni-directionnelle. La zone de communication d'un nœud est considérée comme un disque, sur lequel les paquets sont transmis sans perte alors qu'aucun paquet n'est reçu en dehors. Plus formellement, nous définissons la zone de communication d'un routeur sans fil comme un disque de rayon r_t . Tous les nœuds se trouvant dans la zone de communication peuvent communiquer directement avec le routeur centre du disque.

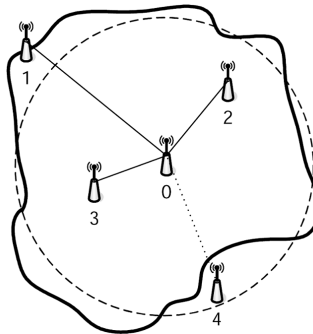


FIGURE 2.1 – Différence d'approximation de la zone de transmission d'un nœud.

Des travaux concernant la connexité des réseaux se sont intéressés à une modélisation du canal radio dans laquelle un affaiblissement aléatoire suivant une distribution log normal est ajouté à la portée de communication (la fonction H) [HM04, MA05]. Contrairement à la modélisation idéale dans laquelle la zone de communication est un disque parfait, la nouvelle modélisation imparfaite change la forme de cette zone. Dans la Figure 2.1, le nœud 0 peut communiquer avec le nœud 4 et pas avec le nœud 1 dans le cas d'un disque, alors que le contraire se passe lorsque la zone de communication est modifiée. Cependant, dans ces travaux, une fois la loi d'affaiblissement modifiée, un seuil non isotrope est à nouveau appliqué, et la zone de communication de chaque nœud est calculée.

2.1.2 Modèle de réseau

La modélisation en graphe des réseaux filaires est classique. S’agissant des réseaux radio, la pertinence d’un tel modèle est plus discutable, les propriétés du médium radio n’étant justement pas binaires comme nous venons de le voir dans la section précédente. Dans le cadre de nos travaux, toutefois, notre objectif étant d’étudier des comportements théoriques optimaux, l’approximation des modèles combinatoires se justifie amplement.

Nous retiendrons un modèle de communication à seuil, qu’il soit basé sur un modèle en distance euclidienne ou un modèle en puissance uniforme, permettant de déterminer pour chaque nœud l’ensemble de ses voisins directs, c’est-à-dire l’ensemble des sommets avec lesquels il peut communiquer directement, i.e. à un saut. Ce modèle physique permet de définir, pour un ensemble de nœuds V , l’ensemble E des transmissions possibles entre des paires de sommets de V . Ces ensembles V et E permettent de définir la modélisation du réseau en *graphe*. Par exemple, dans le cas où la zone de transmission d’un nœud u est un disque unitaire, i.e. où le rayon de transmission $r_t(u) = 1$, la topologie obtenue est appelée *unit disk graph* [CCJ90] (Figure 2.2). De manière générale, pour un rayon quelconque, la topologie est appelée *graphe d’intersection de disques*.

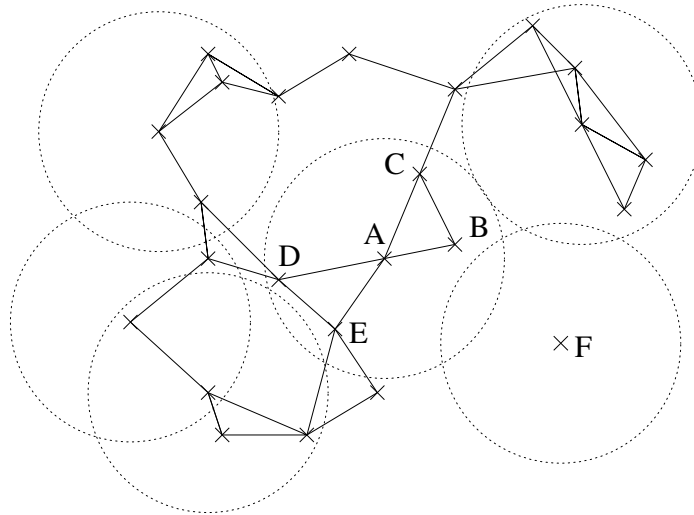


FIGURE 2.2 – Les cercles représentent les zones de transmission des nœuds. Le nœud A peut communiquer directement avec les nœuds B , C , D , et E , mais pas avec le nœud F .

Dans cette thèse, un réseau radio maillé est modélisé par un graphe $G = (V, E)$, où l’ensemble V des sommets représente les routeurs sans fil du réseau, et

les arêtes de l'ensemble E représentent les communications radio possibles entre deux nœuds. Le graphe considéré est en général orienté symétrique, mais il peut également être vu non orienté suivant les cas. Plusieurs noms ont été donnés à G dans la littérature ; nous retiendrons ici graphe des transmissions ou graphe de connectivité.

L'ensemble des sommets du graphe est décomposé en deux sous-ensembles d'intersection vide : $V = V_r \cup V_g$, avec $V_r \cap V_g = \emptyset$. V_g représente l'ensemble des points d'accès et V_r l'ensemble des routeurs dits *simples*, c'est-à-dire qui n'interagissent pas directement avec Internet. Chaque routeur r de V_r possède une demande $d(r)$ correspondant au trafic agrégé des clients mobiles qui se connectent à lui. $\Gamma^-(v)$ (respectivement $\Gamma^+(v)$) représente l'ensemble des arcs entrants (respectivement sortants) du nœud v . De même $E_v = \Gamma^-(v) \cup \Gamma^+(v)$ correspond à l'ensemble des arcs incidents à v .

2.1.3 Réutilisation spatiale

Nous considérons les réseaux radio maillés à un unique canal radio. Cela implique un partage de la bande passante entre les différents nœuds du réseau qui émettent tous sur le même canal. Comme les réseaux radio offrent une bande passante réduite, ils nécessitent un minimum de contrôle dans la gestion de cette bande passante. Un objectif est d'en optimiser son utilisation tout en respectant les contraintes liées aux ressources disponibles ainsi qu'à la réussite des transmissions sans collision.

Il existe différents mécanismes d'évitement des collisions. La plupart des études sur les réseaux radio cellulaires se basent sur une partition des fréquences par cellule (FDMA pour *Frequency Division Multiple Access*) [Sta07]. Dans les télécommunications spatiales, militaires essentiellement, dans les systèmes de navigation par satellites comme le GPS, et dans les réseaux cellulaires américains, l'accès multiple par répartition de code (CDMA pour *Code Division Multiple Acces*) consiste à étaler le spectre au moyen d'un code alloué à chaque communication [Vit95]. L'opération nécessite d'importantes capacités de calcul, donc des composants plus coûteux pour les terminaux grand public. En revanche, les opérateurs ont recours au CDMA pour les liaisons par satellite de leur réseau fixe.

Une hypothèse importante dans nos travaux est de considérer un réseau radio maillé synchrone. En effet, nous nous concentrons sur l'infrastructure fixe de réseau dont la topologie varie très rarement, en cas de modifications par l'opérateur ou en cas de panne. Ainsi, nous pouvons supposer que les bornes ra-

dio sont synchronisées sur une horloge commune contrôlée par l'opérateur, ou par les points d'accès dans le cas d'un réseau radio maillé utilisant la norme WiMax (Section 1.1.1).

Le protocole de communication est alors conçu sur un modèle de multiplexage en temps TDMA (*Time Division Multiple Access*) par intervalles, permettant de transmettre plusieurs signaux sur un seul canal [GL997]. Ce mécanisme effectue une allocation dynamique de trames à chaque communication pour que tous les usagers puissent accéder à la ressource commune [Dju07, DV07]. Cette technologie est par exemple utilisée dans la norme GSM, où chaque canal supporte huit intervalles de temps attribués à huit communications simultanées. Il est également utilisé dans les réseaux de capteurs sans fil [GDP05, EV05, MWW07].

La réutilisation spatiale est la possibilité de pouvoir effectuer plusieurs transmissions simultanées sans inter-brouillage si elles sont suffisamment éloignées les unes des autres. Le protocole STDMA (*Space-Time Division Multiple Access*) est une généralisation de TDMA avec une réutilisation spatiale de l'allocation de bande passante [LZ05]. Dans STDMA, un même intervalle de temps périodiquement répété peut être assigné à plusieurs divisions d'espace éloignées les unes des autres. En d'autres termes, ce protocole d'accès permet l'activation simultanée de plusieurs liens dans le réseau radio maillé situés à plusieurs sauts les uns des autres.

Nous considérons une période de temps $[1, T]$ découpée en intervalles de durée fixe. Chaque lien du réseau est activé durant un certain nombre d'intervalles, ce qui entraîne la création d'une planification indiquant à quel moment un lien transmet. La période de temps est ensuite répétée, faisant fonctionner le réseau en régime permanent. Une allocation optimale des ressources communes correspond à un ordonnancement optimal des communications de manière à éviter les collisions entre les transmissions radio qui interfèrent entre elles [RL93]. Cet ordonnancement est assuré par le protocole d'accès au médium géré par la couche MAC.

Cette allocation de ressources est contrainte par les interférences produites autour d'un nœud émetteur. Afin de modéliser au mieux ces interférences, des modèles ont été développés, chacun étant une approximation de la réalité physique [IRK09].

Une première contrainte, appelée *half-duplex property* dans la littérature, limite à un instant donné l'activation d'au plus un arc incident à chaque nœud du réseau. En effet un nœud ne peut pas émettre et recevoir en même temps,

puisque lorsqu'il reçoit, il est en écoute du canal et ne peut pas instaurer un envoi. Réciproquement lorsqu'un nœud émet des données sur le canal radio, il n'est pas capable de détecter si des données lui sont envoyées par la même occasion.

Formellement, cette condition correspond à l'activation d'au plus une transmission parmi l'ensemble des liens incidents E_v à un nœud v :

$$\sum_{e \in E_v} a(e, t) \leq 1, \quad \forall v \in V,$$

où $a(e, t)$ vaut 1 si le lien e est activé au temps t , 0 sinon.

2.1.3.1 Le modèle SINR

Ce modèle se base sur un modèle physique en puissance. Il permet de mesurer la qualité du signal reçu en un sommet en fonction de paramètres provenant de la couche physique du réseau comme la puissance de transmission des nœuds, le bruit blanc, ou encore le gain du canal radio (i.e. le ratio SNR de la Section 2.1). Mais il mesure également les effets cumulatifs des transmissions simultanées dans le réseau en les comptant comme des interférences.

Définition 2.2 (Ratio SINR) *Etant donné le graphe G modélisant le réseau, la qualité d'une transmission d'un nœud u vers un nœud v est mesurée par le ratio signal sur interférence plus bruit (SINR) en v défini de la manière suivante :*

$$SINR_v = \frac{P_u H(u, v)}{\eta + \sum_{(u', v') \in E, (u', v') \neq (u, v)} P_{u'} H(u', v)}$$

où η représente le bruit blanc, P_u la puissance de transmission du nœud u , et $H(u, v)$ le gain d'une transmission entre les nœuds u et v . Généralement $H(u, v) = d^{-\alpha}(u, v)$ où $d(u, v)$ est la distance séparant les nœuds u et v , et α et le coefficient de perte sur le chemin (en anglais path loss index).

A partir de la définition de ce ratio découle le modèle d'interférence SINR qui se concentre sur la question de comment et à quelle vitesse les liens d'une topologie peuvent être activés au cours du temps. Une transmission entre les nœuds u et v est dite réussie si et seulement si le ratio $SINR_v \geq \gamma$, où γ est un seuil fixé. Cela signifie que la transmission possède une qualité suffisante pour que le nœud v décode le signal envoyé par u , et ce malgré les autres transmissions simultanées dans le réseau.

2.1.3.2 Les modèles binaires

Afin d'éviter les collisions provoquées par les interférences, la norme WiFi 802.11 se base sur un protocole d'accès CSMA/CA qui va autoriser ou refuser la transmission d'un nœud selon un mécanisme de réservation du canal radio (Section 1.1.1). De nombreux modèles d'interférence se basant sur la méthode CSMA/CA ont été développés, chacun d'eux étant une approximation de la réalité physique. Ces modèles sont en général binaires : étant donné un graphe représentant la topologie du réseau, les interférences sont représentées par un *graphe des conflits* défini comme suit :

Définition 2.3 (Graphe des conflits) *Etant donné le graphe de transmissions $G = (V, E)$, le graphe des conflits associé $G_c = (V_c, E_c)$ est construit de la manière suivante :*

- (i) *chaque nœud $v' \in V_c$ correspond à un lien $e \in E$,*
- (ii) *il existe un lien $e' = (u', v') \in E_c$ si et seulement si les liens correspondants à u' et v' dans G interfèrent entre eux.*

Par exemple, la Figure 2.3 décrit la manière de construire un graphe des conflits à partir d'un graphe des transmissions. Le modèle d'interférence simplifié utilisé dans ce cas doit uniquement respecter la propriété *half-duplex*, à savoir que tout émetteur ou destinataire d'une transmission doit être libre de toute émission/réception par ailleurs. Le lien e_2 interfère avec le lien e_1 car ils ont un sommet en commun. e_1 et e_2 ne peuvent donc pas être actifs simultanément puisque dans ce cas, le nœud commun aux deux transmissions ne pourra pas différencier les deux échanges. Dans le graphe des conflits correspondant, les sommets représentant e_1 et e_2 sont donc reliés par un lien, empêchant dans ce cas l'activation de e_1 et de e_2 simultanément.

En théorie des graphes, le *linegraph* $\mathcal{L}(G)$ d'un graphe non orienté G est un graphe représentant l'adjacence des liens de G . L'ensemble des nœuds de $\mathcal{L}(G)$ correspond à l'ensemble des liens de G , et il existe un lien dans $\mathcal{L}(G)$ si et seulement si les deux liens sont adjacents dans G . Cette structure peut donc être directement liée au concept de graphe des conflits [NKK08]. Clairement, le linegraph représente le graphe des conflits du modèle d'interférence avec la propriété *half-duplex* (Figure 2.3).

Les modèles d'interférence binaires sont dérivés des modèles physiques en distance dans lesquels chaque nœud possède un rayon de transmission. La modélisation des interférences se fait alors en définissant un rayon d'interférence

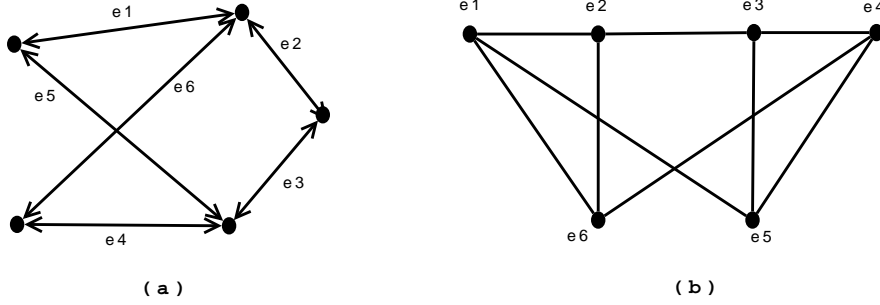


FIGURE 2.3 – (a) : Graphe des transmissions $G = (V, E)$. (b) : Graphe des conflits $G_c = (V_c, E_c)$

$r_i(u)$ pour le sommet u du graphe, qui est en général supérieur ou égale à son rayon de transmission $r_t(u)$. Une zone d'interférence autour de chaque nœud définit alors l'ensemble des sommets du graphe qui interfèrent avec u , à savoir les nœuds situés à une distance inférieure à $r_i(u)$ du nœud u . A chaque lien $e \in E$ est associé l'ensemble \mathcal{I}_e des liens e' qui interfèrent avec lui. A un temps t donné, la contrainte d'activation des liens afin d'assurer un ordonnancement sans conflit est donc la suivante :

$$a(e, t) + a(e', t) \leq 1, \quad \forall e \in E, e' \in \mathcal{I}_e, t \in [1, T] \quad (2.1)$$

A chaque intervalle de temps t , si le lien e est activé, alors tous les liens $e' \in \mathcal{I}_e$ doivent rester inactifs.

Le modèle binaire issu de l'approximation du protocole d'accès CSMA/CA est appelé modèle d'interférence binaire à distance 2. En effet, lorsqu'un nœud accède au canal en envoyant un message *RTS*, tous ses voisins entendent le *RTS* et cessent toute activité. Le destinataire du *RTS* répond, s'il est libre, par un message *CTS* entendu par tous ses voisins qui deviennent silencieux à leur tour. Tous les voisins de l'émetteur et du récepteur n'émettent plus et ne reçoivent plus, ce qui entraîne l'inactivité des liens à distance 1 et 2 du lien initialement concerné. Ce modèle est représenté par la figure 2.4 où les liens en pointillés sont bloqués par l'activation du lien (u, v) .

En terme d'équation linéaire, le modèle binaire à distance 2 se modélise facilement par l'équation suivante :

$$\sum_{e \in E_u \cup E_v} a(e, t) \leq 1, \quad \forall (u, v) \in E \quad (2.2)$$

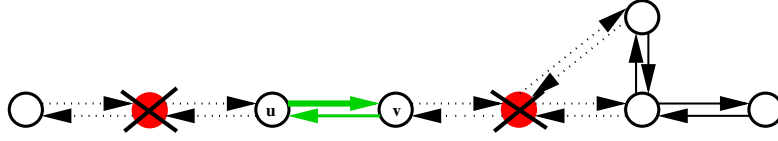


FIGURE 2.4 – Modèle d’interférence binaire à distance 2 : l’activation d’un lien bloque tous les liens situés à distance inférieure ou égale à 2.

A première vue, cette équation semble bloquer uniquement les arcs incidents à l’émetteur u et au destinataire v . Mais si l’on reporte cette équation sur le graphe entier, nous pouvons voir que les liens à distance 2 d’un lien actif sont en fait bloqués par la contrainte correspondant à l’arc à distance 1 de l’arc actif : si (u, v) est actif au temps t , (w, u) est inactif par l’équation 2.2 associée au lien (u, v) , mais un lien (x, w) est bloqué par la contrainte 2.2 associée à (w, u) ($\sum_{e \in E_w \cup E_u} a(e, t) \leq 1$).

Dans ce modèle d’interférence binaire à distance 2, le graphe des conflits correspond au carré du *linegraph*, noté $\mathcal{L}^2(G)$, dans lequel un lien entre deux sommets existe si et seulement les liens correspondants dans le graphe des transmissions sont situés à une distance inférieure ou égale à 2 en nombre de sauts.

Ce modèle peut s’étendre plus généralement aux modèles d’interférence à distance d_I dans lesquels un lien actif bloque tous les liens situés à une distance inférieure ou égale à d_I dans le graphe [KMP08]. Ces modèles sont des approximations du cas où le rayon d’interférence est strictement plus grand que le rayon de transmissions. Le graphe des conflits correspond donc au *linegraph* élevé à la puissance d_I . Dans les tests effectués au cours de la thèse, le modèle d’interférence utilisé par défaut est le modèle binaire à distance 2. Ce choix est justifié par le fait qu’il modélise directement la couche MAC utilisant la méthode d’accès CSMA/CA de la norme WiFi.

2.1.4 Modèle de trafic

Une modélisation classique du problème du routage dans les réseaux de télécommunications utilise la notion de flot (et de multiflot), dans le graphe modélisant le réseau. Nous détaillons le problème du multiflot dans la section suivante, avant de présenter le modèle de trafic pour les réseaux radio maillés intégrant les modèles inter-couche définis ci-dessus.

2.1.4.1 Le problème du multiflot

Le problème du multiflot consiste à calculer des routes pour des commodités qui modélisent des entités en concurrence pour l'accès ou l'utilisation de certaines ressources [AMO93]. Les contraintes de partage des ressources sont modélisées par une capacité sur les arcs du graphe support du multiflot.

Formellement, le problème du multiflot est décrit sur un réseau de flot $G = (V, E)$, avec un ensemble de commodités $K = \{(s_i, t_i), s_i, t_i \in V, i = 1, \dots, k\}$ et une fonction de capacité $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ sur les liens du graphe. Un flot $f^i \geq 0$ de s_i à t_i est une pondération des arcs de G respectant les contraintes de conservation de flot, ou lois de Kirchhoff :

$$\sum_{e \in \Gamma^+(v)} f^i(e) - \sum_{e \in \Gamma^-(v)} f^i(e) = \begin{cases} d_i & \text{if } v = s_i \\ -d_i & \text{if } v = t_i \\ 0 & \text{if } v \in V \setminus \{s_i, t_i\} \end{cases}, \quad \forall i = 1, \dots, k, \quad (2.3)$$

où $f^i(e)$ représente la quantité de flot f^i passant par le lien e , et d_i la demande associée à la commodité i qui doit être routée de s_i à t_i .

Le problème du multiflot est donc de calculer conjointement des flots associés à chaque commodité, tout en respectant les contraintes de capacité sur chaque lien, à savoir que le flot total passant sur un arc e n'excède pas sa capacité $c(e)$:

$$\sum_{i=1, \dots, k} f^i(e) \leq c(e), \quad \forall e \in E. \quad (2.4)$$

Différentes fonctions objectifs existent dans la littérature. Le multiflot maximum consiste à maximiser $\sum_{i=1, \dots, k} d_i$. Si d_i est donné pour chaque commodité (s_i, t_i) , le multiflot concurrent maximum cherche à maximiser une variable λ , telle que chaque source s_i est capable d'injecter $\lambda \cdot d_i$ dans le réseau. Une dernière variante proche du multiflot concurrent consiste, lorsque d_i n'est pas fixé, à maximiser le flot minimum en chaque nœud source : maximiser $\min_{i=1, \dots, k} d_i$. En comparaison du multiflot maximum, ce schéma permet de garantir une certaine équité dans le réseau en donnant la priorité aux commodités les plus contraintes.

Cette écriture du problème utilise un nombre polynomial de variables et de contraintes, ce qui permet de prouver que le problème *fractionnaire*, c'est-à-dire le cas où la valeur des flots est réelle et non entière, est polynomial et qu'il peut être résolu par des algorithmes classiques de programmation linéaire. Nous verrons dans la Section 3.1.1 qu'il existe une formulation différente de ce problème qui

nécessite l'application du théorème séparation=optimisation (Section 1.2.2) pour prouver qu'elle peut se traiter en temps polynomial.

2.1.4.2 Routage dans les réseaux radio maillés

Comme nous l'avons dit précédemment, contrairement aux réseaux ad-hoc sans fil, le trafic dans un réseau radio maillé est essentiellement en direction ou en provenance des points d'accès. Le but du routage est donc de transmettre la demande des clients agrégée en chaque routeur vers les points d'accès le long de chemins maximisant le débit [YKC06]. Il a par ailleurs été montré qu'un routage multi-chemins permet d'augmenter la capacité du réseau [TT07, KIR08], au contraire d'un routage par les plus courts chemins qui ne donnent pas de bons résultats [CACM03]. De même, l'envoi du trafic de manière indifférenciée vers plusieurs points d'accès permet de mieux répartir le trafic dans le réseau, et garantir une meilleure équité pour l'accès au canal radio des routeurs [LSS09].

A chaque intervalle de temps, des liens deux à deux sans interférences sont activés afin de garantir la bonne transmission du trafic sans collision. Pour qu'une communication puisse avoir lieu d'un routeur jusqu'à un point d'accès, il faut que les liens portant un chemin de la source à la destination soient activés successivement. Lorsque le réseau fonctionne en régime permanent, si chaque lien composant un chemin est activé durant le temps $[1, T]$, il suffit de répéter périodiquement l'état du réseau pour obtenir un flot de débit $\frac{c}{T}$ où c est la capacité du lien de moins grand débit le long du chemin.

Dans notre modèle de réseau périodique, nous ne cherchons pas à ce que le trafic de tous les routeurs ait atteint les points d'accès au cours d'une période. A chaque période, un routeur v injecte $d(v)$ unités de trafic dans le réseau à destination des points d'accès. Suivant l'ordonnancement de l'activation des liens au cours d'une période, l'acheminement vers les passerelles d'une unité de trafic peut nécessiter plusieurs périodes. En particulier, notre travail diffère des recherches menées sur le problème de minimisation du temps de collecte (*Minimum Gathering Time*) dans lequel les demandes doivent atteindre le nœud destination en un minimum de temps [BKMS06, BGK⁺06].

Les contraintes du routage sont donc similaires à celle du multiflot auxquelles il faut maintenant ajouter les contraintes liées à l'ordonnancement des communications suivant le modèle d'interférence choisi. Le flot qui passe par un lien est

ainsi contraint par l'activation du lien au cours de la période du réseau :

$$\sum_{v \in V} f(v, e) \leq c_e \cdot \sum_{t \leq T} a(e, t), \forall e \in E \quad (2.5)$$

où c_e correspond à la capacité nominale du lien.

2.2 Configuration des réseaux radio maillés

Dans la section précédente, nous avons défini le modèle inter-couche du réseau que nous considérons. Il est maintenant naturel de combiner les équations liées au modèles physique, de partage des ressources, et de routage, afin de développer un modèle global d'optimisation des réseaux radio maillés.

Nous considérons le cas d'un réseau radio maillé modélisé par un graphe $G = (V, E)$. Chacun de ces routeurs $v \in V$ a une demande $d(v)$ correspondant au trafic des clients qui lui sont raccordés. Le paramètre binaire $s(v)$ indique si le nœud v du graphe est un point d'accès ou un simple routeur : $s(v) = 1$ pour un point d'accès, 0 sinon. Un multiflot correspondant au routage des demandes des routeurs jusqu'aux points d'accès est calculé dans G . $f(v, e)$ représente la quantité de flot envoyée par le nœud v passant sur le lien e . Ce routage est contraint par l'ordonnancement des communications au cours de la période de temps $[1, T]$. L'activation d'un lien e au temps t est représentée par la variable binaire $a(e, t)$. Deux liens e et e' interférant entre eux dans le réseau ($e \in \mathcal{I}_{e'}$ ou $e' \in \mathcal{I}_e$) ne peuvent pas être activés simultanément. Enfin, seules les passerelles peuvent extraire le flot du réseau. Cette contrainte est modélisée par des variables $y(u, v)$ qui correspondent à la quantité de flot envoyée par le sommet u qui est extraite par le nœud v (devant être un point d'accès).

$$\sum_{e=(u,v) \in E} f(r, e) + \mathbf{1}_{\{v=r\}} d(v) = \sum_{e=(v,w) \in E} f(r, e) + y(r, v), \forall r, v \in V \quad (2.6)$$

$$\sum_{v \in V} f(v, e) \leq c_e \cdot \sum_{t \leq T} a(e, t), \forall e \in E \quad (2.7)$$

$$a(e, t) + a(e', t) \leq 1, \forall e \in E, e' \in \mathcal{I}_e, t \in [1, T] \quad (2.8)$$

$$\sum_{v \in V_g} y(r, v) = d(r), \forall r \in V \quad (2.9)$$

$$y(r, v) \leq s(v) \cdot C, \forall r, v \in V \quad (2.10)$$

Les contraintes 2.9 représentent la satisfaction de la demande : chaque routeur possédant une demande injecte son trafic dans le réseau en direction des points d'accès. Les lois de conservation du flot sont regroupées dans les contraintes 2.6 : r est le nœud source du flot f et v est le sommet courant considéré dans le graphe qui agit comme un répéteur et retransmet la quantité de trafic reçue suivant les lois de Kirchhoff. Deux particularités peuvent apparaître : si $v = r$, alors r injecte son trafic $d(r)$ sur ses liens sortants. Et si v est un point d'accès, alors il peut extraire du trafic envoyé par le routeur r , i.e. $y(r, v)$. Les contraintes de capacité sur chaque lien sont représentées par les inégalités 2.7, et celles de l'ordonnancement par les inégalités 2.8. Finalement, nous vérifions que la demande arrive bien aux destinations dans les contraintes 2.10 : les passerelles vont quant à elles recevoir tout le trafic des routeurs, et l'extraire du réseau radio maillé vers le réseau supérieur auquel elles sont connectées.

2.3 Objectifs de l'optimisation

Les équations présentées ci-dessus forment un programme linéaire en nombres entiers décrivant le polytope qui contient toutes les configurations possibles des réseaux radio maillés. En fixant certaines variables en paramètres, et en choisissant une fonction objectif particulière, nous définissons un problème spécifique d'optimisation. Dans la suite, nous décrivons quatre des plus pertinentes optimisations.

2.3.1 Placement minimum de points d'accès

A première vue, le problème du placement optimal d'un nombre minimum de points d'accès (MGPP) a un impact important sur la qualité de service offerte aux clients du réseau. Il est relié aux problèmes de positionnement de facilités (*facility location*) [Vyg05], p -centres, ou p -médian [DJLN08]. Ces problèmes sont tous difficiles, et dans le contexte des réseaux maillés sans fil, la prise en compte des interférences et de la retransmission du trafic sur les chemins multi-sauts ajoutent de nouvelles contraintes [ACC⁺08]. Ce problème a été étudié dans la littérature pour différents types de réseaux sans fil [YY07, LHFL07].

Nous considérons le cas d'un réseau dont la topologie et le trafic à écouler sont donnés : chaque nœud du réseau est un routeur devant transmettre une certaine quantité de trafic aux points d'accès. Le problème consiste à choisir un sous-ensemble minimum de nœuds parmi les routeurs sans fil déployés qui seront reliés

à Internet. Le problème du placement minimum de points d'accès cherche donc à déployer les passerelles dans le réseau, parmi les routeurs, de manière à satisfaire l'ensemble des demandes [CQJM04, ABIK06]. La demande d'un routeur est dite *satisfaite* si ses paquets sont transmis aux points d'accès à un débit suffisant. Si le routeur devient lui-même un point d'accès, sa demande est auto-satisfaite sans consommer de bande passante radio.

Il est possible de spécifier un sous-ensemble V_c de routeurs candidats au préalable, les variables $s(v)$ étant définies uniquement pour cet ensemble (i.e. $s(v) = 0 \forall v \notin V_c$).

Le programme linéaire associé au problème *MGPP* est alors synthétisé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \textbf{Objectif : } & \min \sum_{v \in V} s(v) \\ \text{s.c. : } & \text{eq.(2.6)-(2.10)} \end{aligned}$$

2.3.2 Placement équitable d'un nombre fixe de points d'accès

Si le nombre n de passerelles à déployer est connu, l'objectif du placement équitable de points d'accès (FGPP) revient à placer ce nombre de points d'accès de manière à répartir équitablement la capacité du réseau, i.e. de sorte que le débit minimum alloué à un routeur soit maximum parmi tous les routages et ordonnancements possibles. Comme pour MGPP, un sous-ensemble de routeurs candidats peut être pré-défini. Les demandes de trafic ne sont alors pas connues et deviennent des variables du programme linéaire associé à FGPP :

$$\begin{aligned} \textbf{Objectif : } & \max(\min_{v \in V}(d(v))) \\ \text{s.c. : } & \text{eq.(2.6)-(2.10)} \\ & \sum_{v \in V} s(v) = n \end{aligned}$$

2.3.3 Ordonnancement et routage équitable

Le problème joint du routage et de l'ordonnancement est un problème très étudié pour l'optimisation des réseaux radio [KN03, ZWZL05, CFGM07]. Il est motivé par l'efficacité des approches inter-couche pour les problèmes d'optimisation. Ces problèmes qui combinent le routage et l'ordonnancement sont également

durs à résoudre, principalement à cause du nombre important de variables binaires de l'ordonnancement. En particulier, l'ordonnancement dans le cas du problème de diffusion dans les réseaux radio est *NP*-complet [HHS03].

Dans ce type de problème, un placement exact des passerelles dans le réseau est connu : les ensembles V_r et V_g des routeurs et points d'accès sont clairement définis. Les valeurs $s(v)$ sont des constantes du problème et valent 1 si $v \in V_g$, 0 sinon. L'objectif du problème joint du routage et ordonnancement équitable (FRSP) est de maximiser le débit équitable en chaque routeur de V_r qu'il est possible de router vers au moins un point d'accès de V_g le long de chemins constitués de liens pouvant être activés dans un intervalle de temps fixé.

$$\begin{aligned} \text{Objectif :} \quad & \max(\min_{v \in V} (d(v))) \\ \text{s.c. :} \quad & \text{eq.(2.6)-(2.10)} \\ & s(v) = \begin{cases} 1 & \forall v \in V_g \\ 0 & \forall v \in V_r \end{cases} \end{aligned}$$

2.3.4 Ordonnancement et routage en temps minimum

Comme dans la section précédente, le graphe est supposé entièrement connu, c'est-à-dire que la topologie de l'infrastructure fixe du réseau radio maillé est donnée, avec les ensembles des routeurs V_r et des passerelles V_g .

Comme nous l'avons dit plus haut, un chemin activé qui transporte c unités de flot sur son lien le plus contraint durant la période $[1, T]$, a un débit de $\frac{c}{T}$ en régime permanent. Le problème *FRSP* précédant cherchant à maximiser c , un problème équivalent peut être défini : étant donné le trafic de chacun des routeurs à envoyer aux points d'accès, combien d'intervalles de temps sont nécessaires au minimum pour activer des chemins entre V_r et V_g pouvant transporter cette demande. En d'autres termes, l'objectif du problème (MRSP) est de router chaque demande d'un routeur source de V_r vers au moins un point d'accès de V_g le long de chemins constitués de liens pouvant être activés dans un intervalle de temps d'amplitude minimale [YKC06].

Nous introduisons la variable $u(t)$ qui indique si un intervalle de temps t est utilisé, c'est-à-dire si au moins un lien est activé au temps t . Comme le but est de minimiser T , la taille de la période du réseau, il est nécessaire d'introduire une borne T_{max} sur la durée initialement autorisée (car sans contrainte sur l'ordre d'activation des liens, les liens pourraient rester inactifs longtemps avant d'enfin

utiliser un intervalle). Nous cherchons ensuite à minimiser le nombre d'intervalles utilisés, i.e. $\sum_{t \in [1, T_{max}]} u(t)$.

$$\begin{aligned}
 \text{Objectif :} \quad & \min \sum_{t \leq T_{max}} u(t) \\
 \text{s.c. :} \quad & \text{eq.(2.6)-(2.10)} \\
 & a(e, t) \leq u(t) \quad \forall e \in E, t \leq T_{max} \\
 & s(v) = \begin{cases} 1 & \forall v \in V_g \\ 0 & \forall v \in V_r \end{cases}
 \end{aligned}$$

2.4 Vers une résolution efficace

Les modèles présentés dans la Section 2.3 ont été implémentés en utilisant la bibliothèque MASCOPT (Section 1.3), et résolu par le logiciel CPLEX d'ILOG. Nous les avons validés sur des topologies régulières comme la ligne ou la grille, ainsi que sur des topologies aléatoires maillées. Le modèle d'interférence utilisé dans ces tests est le modèle binaire à distance 2 modélisant la couche MAC CSMA/CA. La capacité nominale des liens est fixée à 20, signifiant que le lien peut supporter 20 unités de flots à chaque activation.

L'inconvénient de cette formulation optimale de problèmes de *design* de réseau réside dans l'intégralité des variables. En effet, même pour des petits réseaux et en considérant une période de temps assez courte, le programme génère des milliers de contraintes et de variables binaires. Cela rend la résolution de ces problèmes linéaires entiers très difficile dès lors que les topologies dépassent la vingtaine de nœuds. Sur le Tableau 2.1, nous pouvons voir que seules des solutions approchées sont obtenues sur des grilles 5×5 et 7×7 . Le facteur d'approximation est dénoté *écart OPT* dans le tableau qui résume les résultats de nos tests.

La combinaison des 4 formulations présentées (MGPP, MRSP, FGPP, et FRSP) permet d'obtenir des résultats très intéressants pour le déploiement des réseaux radio maillés. MRSP permet de déterminer la durée de la période de temps nécessaire à router un trafic donné, connaissant le placement des points d'accès. Avec la fonction objectif de MGPP, nous allons placer un nombre minimum de points d'accès dans le réseau de manière à satisfaire une demande spécifique. Puis FRSP calcule la demande maximum que peut envoyer chaque routeur aux points d'accès à partir de ce placement. Par exemple, nous avons besoin de 2 passerelles

Topologies	point d'accès	durée période (#slots)	temps résolution (s)	écart OPT (%)	débit
ligne 7 nœuds	0	10	4.39	0	60
grille 3x3	centre	5	286.31	0	25
grille 3x3	bord	5	67.98	0	33
grille 3x3	bord	6	130.67	0	40
grille 3x3	centre	6	98.22	0	50
grille 5x5	centre	10	1705.20	20	29
grille 5x5	coin	10	1068.41	20	25
grille 5x5	centre	20	16362.83	20	62
grille 7x7	centre	15	40998.59	20	21
mesh 6 nœuds	1	5	1.50	0	50
mesh 8 nœuds	4	5	110.57	0	66
mesh 11 nœuds	1	10	9444.22	3	33

TABLE 2.1 – Résultats obtenus pour FRSP avec 1 point d'accès

pour router 5 unités de flot depuis chaque routeur d'une grille 4×4 , avec une capacité nominale de 20 sur chaque lien et 5 intervalles de temps (Figure 2.5(a)). Parallèlement, le résultat de MRSP sur la même topologie nous indique que router une demande de 5 avec un unique point d'accès placé sur le sommet 10 nécessite en fait 6 intervalles de temps (Figure 2.5(b)). Etant donné le placement initialement calculé par MGPP en entrée du problème FRSP, le débit équitable en chaque routeur peut être amélioré. La Figure 2.5(c) montre que le placement dans la grille de deux points d'accès aux nœuds 11 et 13 calculé pour une demande fixée de 5 peut en fait satisfaire une demande de 6 durant la même période de temps.

Enfin, avec l'objectif de FGPP, nous pouvons chercher un nouveau placement des passerelles de manière à maximiser le débit équitable en chaque routeur. Si nous utilisons le nombre de points d'accès trouvé initialement par MGPP (e.g. 2), alors FGPP calcule un meilleur débit de 8 unités pour la même période de temps comme décrit dans la Figure 2.5(d) avec un nouveau placement des deux points d'accès. Enfin, nous pouvons confirmer avec MRSP que, étant donné le placement de FGPP et le débit de 8 unités, la durée de la période de temps $T = 5$ est optimale. Les demandes fixées dans MGPP ne sont pas forcément les maximum qui peuvent être satisfaites dans le réseau, puisque nous nous concentrons sur le placement, alors que le problème FRSP calcule ces débit maximum pour le placement. Mais peut être que le placement n'est lui-même pas optimal pour un même nombre de points d'accès, et un meilleur placement peut alors augmenter le débit du réseau. Ainsi, FGPP trouvera ce placement optimal associé au débit optimal.

Comme nous l'avons vu dans le tableau 2.1, même sans le placement, le

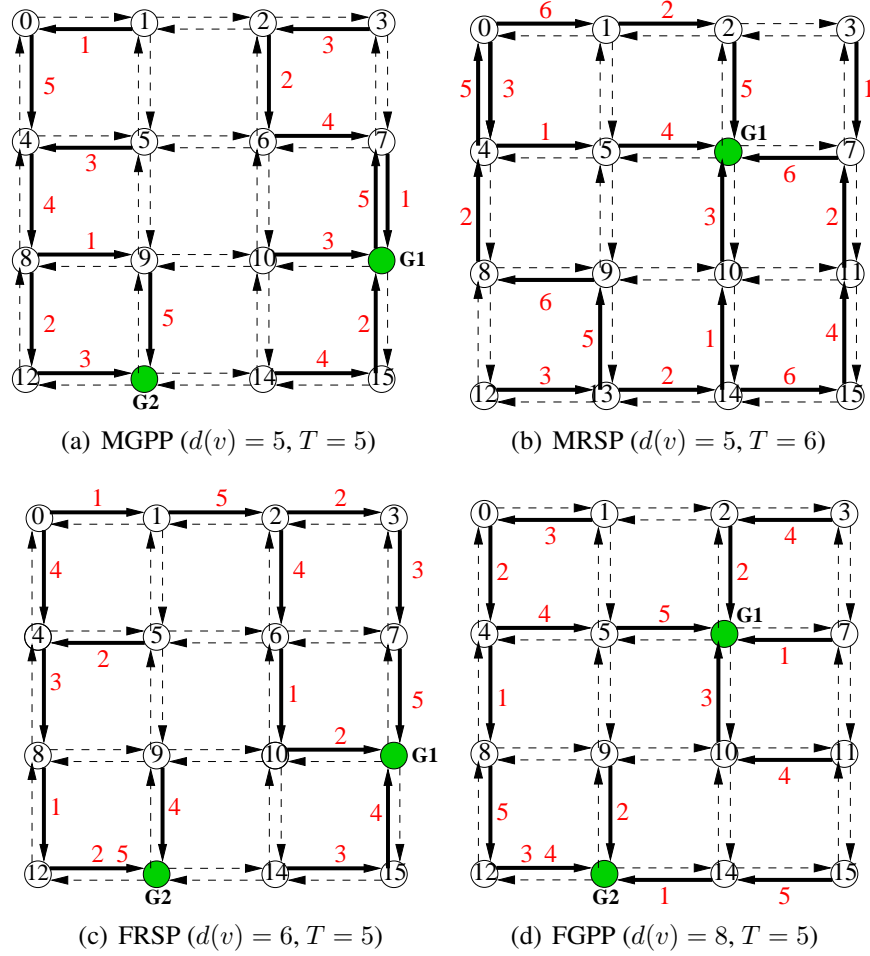


FIGURE 2.5 – Résultats pour la grille 4×4 . Les indices sur les liens représentent les intervalles de temps au cours desquels le lien est activé.

problème FRSP est déjà dur à résoudre. L'ajout des variables binaires de placement augmentant la difficulté du problème, nous décidons de nous concentrer sur le problème joint du routage et de l'ordonnancement. Une relaxation continue de la formulation classique en sommet/arc serait sans intérêt car la structure d'un ordonnancement est intimement liée à la propriété binaire des variables $a(e, t)$. Il faut donc reformuler le problème de manière à intégrer la combinatoire dans les variables utilisées et non dans les équations.

Nous pouvons par ailleurs remarquer qu'un ordonnancement des transmissions n'est pas indispensable pour ce qui est d'optimiser la capacité. En effet, une permutation des intervalles laisse le coût de la solution inchangé. Il suffit donc

de connaître la liste des ensembles de transmissions activés dans une solution optimale pour construire un ordonnancement optimal, en affectant à chaque ensemble un intervalle dans un ordre arbitraire. Le problème revient alors à calculer une simple pondération des ensembles de transmissions. En permettant à cette pondération d'être continue et non entière, une relaxation du problème original conserve pour autant sa structure principale.

En se fondant sur ces remarques, nous développons une nouvelle formulation linéaire pour le problème MRSP décrite dans le chapitre suivant.

Ordonnancement et Routage : une résolution efficace

Toujours dans l'optique d'étudier la capacité des réseaux radio maillés dédiés à l'accès à Internet, nous nous concentrons ici sur le problème joint du routage et de l'ordonnancement [CFGM07, ZWZL05]. L'étude de ce problème nécessite une modélisation des caractéristiques inter-couche du réseau car les performances du réseau dépendent fortement des stratégies de déploiement, du protocole de routage, et des propriétés physiques du réseau. L'optimisation de la capacité permet d'améliorer les performances des algorithmes de routage, et l'efficacité du routage dépend du problème de l'allocation des ressources au niveau des couches physique et liaison de données.

Nous nous plaçons dans l'hypothèse d'un réseau synchrone fonctionnant en régime permanent où les transmissions partagent un même canal radio comme présenté dans le chapitre précédent. L'allocation de ressources se fait suivant une méthode d'accès STDMA dans laquelle la capacité de transmission est divisée en intervalles de temps, et chaque intervalle est dédié à des transmissions sur un ensemble de liens compatibles dans le réseau, i.e. des liens deux à deux sans interférence. Comme le réseau est périodique, nous verrons que l'ordonnancement peut en fait être relâché en une pondération des liens au cours de la période. Plus précisément, nous nous basons sur le problème MRSP décrit dans la Section 2.3.4 du chapitre précédent, pour lequel nous montrons que l'ordre d'activation des liens n'a pas d'influence sur le coût de la solution optimale. Seul le nombre d'intervalles de temps considéré et le nombre de fois où un lien est activé sont importants. La relaxation du problème MRSP mène donc vers le calcul d'une pondération des ensembles de liens compatibles, correspondant à une durée d'activation au cours de la période de temps. Cette durée d'activation doit alors être suffisante afin que chaque lien puisse supporter le flot qui doit le traverser. Nous nous ramenons ainsi au problème de pondération des *rounds* RWP (*Round Weighting Problem*), qui a été introduit par Morales et al [KMP08, Mor07]. Dans notre cas, le calcul d'une pondération des ensembles de liens compatibles, les

rounds, est couplée au problème du routage entre les routeurs et les points d'accès dans les réseaux radio maillés. La combinatoire du problème est alors reportée entièrement sur les variables du programme linéaire, ce qui permet d'utiliser des méthodes sophistiquées de résolution du problème.

Notre contribution principale, présentée dans la Section 3.2.2, est une formulation du problème RWP dans laquelle nous pouvons manipuler les objets combinatoires de ce problème, à savoir les chemins entre les routeurs et les points d'accès, ainsi que les *rounds* introduits dans la Section 3.2. Nous en présentons ensuite une résolution efficace par la méthode de génération de colonnes qui permet de ne générer qu'un nombre restreint de variables pour obtenir la solution optimale au problème (Section 3.3). Des tests, décrits dans la Section 3.4, valident la relaxation structurelle et linéaire de l'ordonnancement et dégagent des perspectives intéressantes sur les contraintes locales qu'il est nécessaire d'optimiser pour maximiser la capacité du réseau. La section suivante introduit dans un premier les notions utiles pour la suite du chapitre et de la thèse.

3.1 Préliminaires

Dans cette section, nous présentons la transformation du problème du multiflot introduit dans la Section 2.1.4.1 du chapitre précédent, en une nouvelle formulation dite en *arc/chemin*. Cette formulation possède des propriétés très intéressantes, qui sont décrites dans la section suivante.

3.1.1 La formulation arc/chemin du multiflot

La formulation classique du problème du multiflot, présentée dans la Section 2.1.4.1, est dite en *sommet/arc*. En effet, les variables et les contraintes de ce programme linéaire sont définies en fonction des sommets et des arcs du graphe. Plus précisément, la matrice associée au programme linéaire du multiflot *sommet/arc*, définie dans la Section 1.2, est indexée par $V \times E$, c'est-à-dire qu'elle possède autant de lignes que de sommets et autant de colonnes que d'arcs dans le graphe. Or, les lois de Kirchhoff de conservation du flot en chaque sommet permet de considérer un flot comme une combinaison linéaire de chemins : pour chaque commodité, un ensemble de chemins transportant chacun une certaine quantité de flot est calculé. L'objectif du multiflot consiste ainsi à sélectionner des chemins dans le graphe pour chaque commodité, tout en respectant les contraintes de capacité sur les arcs utilisés par ces chemins.

Cette remarque permet de décrire une formulation différente du problème du multiflot dans laquelle la matrice du programme linéaire est indexée par $E \times \mathcal{P}$, c'est-à-dire que les variables dépendent maintenant des chemins, et les contraintes sont exprimées sur les arcs du graphe.

Soient $G = (V, E)$ le réseau de flot, c la fonction de capacité sur E , $K = \{(s_i, t_i), s_i, t_i \in V, i = 1, \dots, k\}$ l'ensemble des commodités, et \mathcal{P}_i l'ensemble des chemins entre s_i et t_i dans G , le flot f^i de s_i à t_i devient maintenant une pondération des chemins $P \in \mathcal{P}_i$ vérifiant les contraintes de capacité. Les contraintes de conservation de flot ne sont maintenant plus spécifiées puisque la définition même d'un chemin implique ces lois de conservation. La formulation *arc/chemin* du multiflot maximum, où l'objectif est de maximiser la somme des flots envoyés pour chaque commodité $i = 1, \dots, k$, est alors la suivante :

$$\max \sum_{i=1, \dots, k} \sum_{P \in \mathcal{P}_i} f^i(P) \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=1, \dots, k} \sum_{P \ni e, P \in \mathcal{P}_i} f^i(P) \leq c(e), \forall e \in E \quad (3.2)$$

$$f^i(P) \geq 0, \forall i = 1, \dots, k, P \in \mathcal{P}_i \quad (3.3)$$

Contrairement à la formulation *sommet/arc*, cette formulation possède un nombre exponentiel de variables (dû au nombre exponentiel de chemins en la taille du graphe). Cependant, son programme dual peut être vu comme un problème de plus court chemin :

$$\min \sum_{e \in E} \beta_e c(e)$$

$$\begin{aligned} \sum_{e \in P} \beta_e &\geq 1, \forall P \in \mathcal{P}_i, i = 1, \dots, k \\ \beta_e &\geq 0, \forall e \in E \end{aligned}$$

où β_e est la variable duale associée à la contrainte 3.2.

Le problème de séparation (introduit dans la Section 1.2.2) dans ce cas correspond au calcul d'un plus court chemin par commodité [Riv03]. Cela permet de conclure que la formulation *arc/chemin* du problème du multiflot peut se traiter en temps polynomial. Dans tous les cas, si les variables de flot sont réelles, les deux formulations du problème du multiflot se résolvent en temps polynomial

par la programmation linéaire. Au contraire, si les variables sont entières, le problème devient *NP*-difficile.

Dans le cas des réseaux radio maillés, une commodité n'est pas définie entre une paire de sommets, car la destination parmi l'ensemble des points d'accès n'est pas spécifiée. En effet, dans ce type de réseau, il a été montré que l'envoi du trafic vers plusieurs points d'accès permet d'obtenir de meilleures performances [LSS09]. Nous considérons donc le routage du trafic depuis chaque routeur vers les points d'accès de manière indifférenciée. Sous ces hypothèses, le problème du routage peut être vu comme un problème de simple flot dans le graphe étendu avec une paire (source, destination), où la source est reliée à chaque routeur du réseau par un lien virtuel de capacité $d(r)$ correspondant au trafic du routeur r que nous souhaitons router, et la destination est reliée à chaque point d'accès par des liens de capacité infinie. Un tel graphe étendu sera concrètement utilisé dans les Chapitres 4 et 6. Dans la suite, nous utilisons donc un simple flot f sur l'ensemble des chemins du graphe entre les routeurs et les points d'accès.

3.1.2 La génération de colonnes

La génération de colonnes est une méthode efficace pour résoudre des programmes linéaires de grande taille [LD05, DDS05]. Elle repose sur la décomposition de Dantzig et Wolfe [DW60], qui consiste à séparer l'ensemble des contraintes en deux sous-ensembles selon que les coefficients des variables dans chacune des contraintes soient strictement positifs ou non. L'idée centrale est que les programmes linéaires de grande taille ont trop de variables (ou *colonnes*) pour que nous puissions toutes les énumérer de manière explicite. À l'optimum, seul un (petit) sous-ensemble de variables peut être pris en compte pour résoudre le problème, car la plupart d'entre elles sont soit nulles dans la solution optimale, soit *hors base*, c'est-à-dire qu'elles ne font pas partie des hyperplans dont le point extrême optimal du polytope constitue l'intersection (suivant les résultats que nous avons présenté dans la Section 1.2). Le problème est alors décomposé en deux parties : la résolution du programme linéaire initial appelé *programme maître*, et celle de sous-programmes appelés *programmes auxiliaires*.

Une méthode utilisant la génération de colonnes initialise le programme maître avec un sous-ensemble de colonnes de petite taille autorisant l'existence d'au moins une solution réalisable du problème (i.e. un polytope des solutions non vide). Le mécanisme itératif de la génération de colonnes consiste alors à résoudre

le programme maître avec cet ensemble restreint de variables et obtenir la solution optimale associée. Puis le processus cherche à identifier, au sein des programmes auxiliaires, des colonnes qui sont susceptibles d'améliorer la solution courante, ou vérifier que de telles colonnes n'existent pas. Une colonne est susceptible d'améliorer la solution courante si elle possède un coût réduit négatif. Les coûts réduits sont identifiés à partir des valeurs des variables duales associées à la solution optimale courante (Section 1.2.1). Un coût réduit négatif correspond donc à une violation de la contrainte du programme dual associée à une variable primale. Si des nouvelles colonnes améliorantes existent, alors le programme maître est résolu en prenant en compte les nouvelles variables correspondantes. Ce processus est répété jusqu'à ce qu'aucune colonne améliorante ne soit trouvée.

Dans la théorie de la programmation linéaire et de la dualité [Chv83], il est connu que, dans une solution optimale d'un programme linéaire, le coût réduit d'une variable non bornée est égal à la valeur de l'écart de sa contrainte duale correspondante. En ce sens, la génération de colonnes peut être vue comme une séparation dans le programme dual. Le théorème séparation = optimisation (Section 1.2.2) permet ainsi de garantir l'obtention de la solution optimale à la fin du processus, i.e. lorsque plus aucune colonne n'est générée par les programmes auxiliaires.

L'efficacité de la méthode est très dépendante du mécanisme utilisé pour générer des colonnes. En effet, la complexité du processus de génération de colonnes est donnée par celle de ses programmes auxiliaires (Section 1.2.2). Nous verrons dans la suite qu'en général, un des problèmes auxiliaires à résoudre est souvent *NP*-difficile. Dans notre cas, les résultats des tests permettent néanmoins d'être optimiste quant au temps de résolution en pratique de la génération de colonnes pour le problème étudié.

Dans ce chapitre, nous appliquons cette technique au problème joint du routage et de l'ordonnancement dans les réseaux radio maillés. Le but de l'ordonnancement est de sélectionner un ensemble de liens compatibles à chaque intervalle de la période du réseau. De la même manière, nous pouvons caractériser le routage comme la sélection d'un ensemble de chemins entre les routeurs et les points d'accès, sur lesquels le flot va s'écouler. Nous présentons dans la section suivante une formulation linéaire du problème basée sur le problème de pondération des *rounds*. Une relaxation structurelle et linéaire de l'ordonnancement permet alors de générer des variables du problème de manière dynamique grâce au processus de génération de colonnes. Dans notre cas, les problèmes auxiliaires découlent à la

fois de problèmes polynomiaux, comme trouver un plus court chemin entre deux nœuds, mais également de problèmes *NP*-difficiles, comme trouver un ensemble indépendant de poids maximum dans le graphe des conflits.

3.2 Le problème de pondération des *rounds* (RWP)

Plutôt que de chercher à obtenir un ordonnancement précis de chaque lien au cours des intervalles de la période de temps, l'allocation de ressources peut se voir comme l'activation d'un ensemble de liens deux à deux compatibles à chaque étape. Pour cela, nous allons définir ici une notion très utile dans la suite de cette thèse :

Définition 3.1 (Rounds) *Un round correspond à un ensemble de communications compatibles dans le réseau. Il est modélisé par un ensemble de liens du graphe pouvant être activés simultanément.*

Dans les modèles d'interférence binaires, les *rounds* correspondent à des ensembles indépendants, ou stables, du graphe des conflits, c'est-à-dire un sous-ensemble de sommets deux à deux non reliés. Cette propriété est illustrée par la Figure 3.1 où nous pouvons voir un graphe des transmissions G correspondant à une ligne de 4 routeurs et un point d'accès situé sur le nœud le plus à gauche, et son graphe des conflits construit en appliquant le modèle d'interférence à distance 2 utilisé comme approximation du protocole d'accès CSMA/CA. Nous voyons clairement la correspondance entre les *rounds* $\{A1, A4\}$, $\{A2\}$, $\{A3\}$ et les stables du graphe des conflits associé¹.

Comme nous l'avons introduit dans la Section 2.4 et allons le détailler en Section 3.2.1, puisque le réseau fonctionne en régime permanent, nous pouvons nous affranchir de l'ordonnancement, algorithmiquement coûteux, et ne calculer qu'une pondération des *rounds* dans le réseau. Cette remarque nous mène à l'étude du problème de pondération des *rounds* dans la section suivante.

3.2.1 Relaxation structurelle et formulation linéaire

Dans les résultats du problème MRSP du chapitre précédent, nous voyons que l'ordre de la séquence d'activation des liens (et donc des *rounds*) ne détermine

1. Dans le cas du modèle d'interférence binaire à distance 2, un *round* est par ailleurs un couplage induit de G

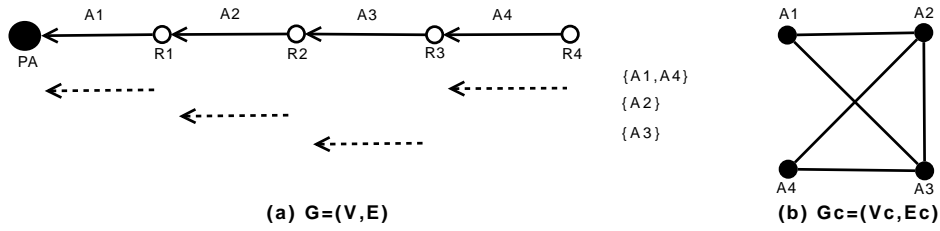


FIGURE 3.1 – Modèle binaire d'interférence à distance 2 : (a) Graphe des transmissions, (b) Graphe des conflits. Les ensembles de communications compatibles $\{A_1, A_4\}$, $\{A_2\}$, $\{A_3\}$ constituent des stables du graphe des conflits.

pas la qualité de la solution. En effet, nous ne cherchons pas à savoir exactement au cours de quel intervalle un *round* sera activé, mais seulement les ensembles de transmissions activés au cours de la période dans une solution optimale. Afin d'illustrer cette propriété, nous reprenons le réseau en ligne de l'exemple précédent, composé de 4 routeurs et d'un point d'accès. La Figure 3.2 montre bien que l'ordre dans lequel les *rounds* sont activés ne change pas leur poids dans la solution optimale, et donc son coût. Deux ordonnancements différents des *rounds* sont présentés dans le cas où chaque routeur doit envoyer une unité de flot vers le point d'accès. Le lien incident à la passerelle doit supporter 4 unités de flot, et cette quantité décroît de 1 à chaque fois que nous nous éloignons du point d'accès. Ces ordonnancements peuvent ainsi être relâchés en une seule et même pondération : le *round* $\{A_1, A_4\}$ doit avoir un poids au moins égal à 4, $\{A_2\}$ à 3, et $\{A_3\}$ à 2, pour une période de temps minimum de 9. Inversement, à partir d'une pondération optimale, un ordonnancement optimal peut être généré en affectant à chaque *round* un nombre d'intervalles suffisant de manière arbitraire.

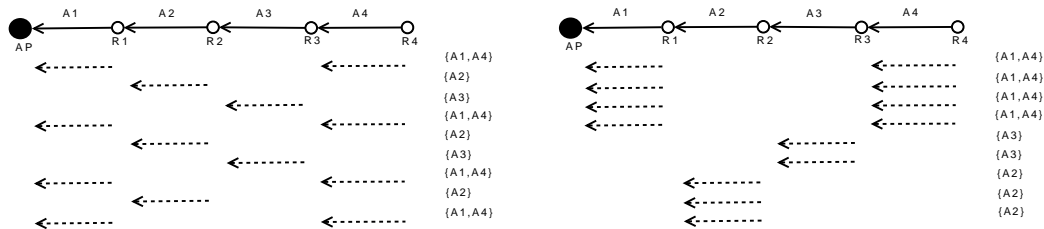


FIGURE 3.2 – L'ordre d'activation des *rounds* ne change pas la valeur de la solution optimale.

Dans la formulation de MRSP que nous pouvons qualifier de sommet/arc, la structure des *rounds* est définie dans les contraintes du programme linéaire. Il n'est pas possible de relâcher la contrainte d'ordonnancement $a(e, t) + a(e', t) \leq 1$, $\forall e' \in \mathcal{I}_e$, $e \in E$, puisque fixer par exemple toutes les variables à $1/2$ laisserait la solution réalisable pour le programme linéaire, mais nous perdriions dans ce cas la structure même d'un ordonnancement des transmissions sans collision. Il devient alors intéressant de transférer la structure combinatoire dans les variables et non plus dans les contraintes afin de rendre possible une relaxation continue qui soit efficace. Pour cela, la matrice du programme linéaire doit être indexée par les objets combinatoires du problème du routage et de l'ordonnancement que nous étudions, à savoir les chemins et les *rounds*. La formulation de RWP qui suit inclut la prise en compte des *rounds* dans les variables, ce qui permet d'envisager une formulation chemin/*round* ainsi qu'une relaxation linéaire efficace présentées dans la Section 3.2.2.

Etant donné le graphe de connectivité $G = (V, E)$, l'ensemble des *rounds* $\mathcal{R} \subseteq 2^E$, et une fonction de demande $d : V \rightarrow \mathbb{R}^+$, le problème de pondération des *rounds* (RWP) consiste à déterminer une fonction de poids w sur l'ensemble \mathcal{R} représentant le nombre d'intervalles de temps au cours desquels chaque *round* est activé [KMP08].

Chaque arc $e \in E$ hérite, de l'ensemble des *rounds* auxquels il appartient, une capacité $c_w(e) = \sum_{R \in \mathcal{R}, e \in R} w(R)$.

L'objectif est alors de minimiser le poids total des *rounds* :

$$\min \sum_{R \in \mathcal{R}} w(R),$$

tout en satisfaisant les contraintes de capacité sur les arcs qui vérifient que le flot traversant un arc n'excède pas la capacité de l'arc induite par sa pondération w :

$$\sum_{v \in V} f(v, e) \leq c_w(e), \quad \forall e \in E,$$

ainsi que les contraintes de satisfaction de la demande :

$$\sum_{e \in \Gamma^+(v)} f(v, e) \geq d(v), \quad \forall v \in V.$$

Au contraire du chapitre précédent, nous considérons à partir de maintenant qu'un

lien actif à un instant donné peut supporter au plus une unité de flot (i.e. la capacité nominale c_e du lien est fixée à 1).

Ce problème a été étudié dans la thèse de Nelson Morales [Mor07] pour différents modèles d'interférence binaires. Trouver une solution optimale est en général un problème NP-difficile car il est relié au problème du stable maximum dans le graphe des conflits, comme nous le verrons dans la Section 3.3.2.

3.2.2 Formulation chemin/round et relaxation linéaire

Chaque *round* $R \in \mathcal{R}$ peut donc être activé un certain nombre de fois, noté $w(R)$, durant la période du réseau. Etant donné l'ensemble des chemins \mathcal{P}_v allant du routeur v vers les passerelles, $f(P)$, pour $P \in \mathcal{P}_v$, correspond à la quantité de flot envoyée sur le chemin P depuis v jusqu'à la passerelle située à son extrémité. Un seul *round* pouvant être activé à la fois, la somme des temps d'activation des *rounds* est égale à la longueur de la période du réseau, celle là même que nous cherchons à minimiser afin de garantir un débit suffisant sur les chemins en régime permanent (comme pour MRSP dans la Section 2.3.4). La capacité d'un lien dépend de son activation au cours de la période : elle est donnée par la somme des temps d'activation des *rounds* dont il fait partie.

Dans la suite, nous notons $\mathcal{P} = \cup_{v \in V_r} \mathcal{P}_v$, l'ensemble des chemins entre les routeurs et les points d'accès du réseau radio maillé. Nous pouvons alors formuler le problème RWP associé à l'ordonnancement et au routage dans les réseaux radio maillés de la façon suivante :

$$\min \sum_{R \in \mathcal{R}} w(R) \quad (3.4)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}, P \ni e} f(P) \leq \sum_{R \in \mathcal{R}, R \ni e} w(R), \forall e \in E \quad (3.5)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_r} f(P) = d(r), \forall r \in V_r \quad (3.6)$$

Le nombre de contraintes de cette formulation est fortement réduit par rapport à celle de la Section 2.2, puisque les contraintes de conservation de flot et de compatibilité des transmissions n'ont plus lieu d'être. Seuls le respect des capacités par le flot (eq. 3.5) et l'envoi du trafic dans le réseau (eq. 3.6) doivent être exprimés. En contrepartie, le nombre de variables explose. En effet, le nombre de chemins

entre deux points dans un graphe, ainsi que le nombre de *rounds*, sont exponentiels. Il n'est donc pas possible de manipuler concrètement cette formulation avec l'ensemble complet des variables. Pour cela, nous étudions une relaxation linéaire du problème ainsi que son programme dual afin de mettre en place une résolution par génération de colonnes.

Lorsque le problème est relâché, $w(R)$ représente le temps durant lequel R est activé au cours de la période. Pour une période de longueur $T = \sum_{R \in \mathcal{R}} w(R)$, le *round* R est alors activé $\frac{w(R)}{T}$ % du temps. La technique de génération de colonnes peut alors être appliquée à la relaxation linéaire du problème (Section 3.3), permettant ainsi d'éviter l'énumération de la totalité des variables.

3.2.3 Dualité

Le programme dual associé au programme chemin/*round* décrit ci-dessus possède deux contraintes correspondant aux variables $f(P)$ et $w(R)$. Nous introduisons les variables duales β_e , $e \in E$, associées à la contrainte 3.5, et γ_u , $u \in V_r$, associées à la contrainte 3.6. Le programme dual consiste alors à maximiser une forme de “*volume*” du graphe, $\sum_{r \in V_r} d(r)\gamma_r$, sous les contraintes de longueur de chemin et de poids de *round* suivantes :

$$\sum_{e \in P} \beta_e \geq \gamma_{\mathcal{O}(P)}, \forall P \in \mathcal{P} \quad (3.7)$$

$$1 \geq \sum_{e \in R} \beta_e, \forall R \in \mathcal{R} \quad (3.8)$$

où $\mathcal{O}(P) \in V_r$ correspond au nœud source du chemin P .

Les programmes auxiliaires du processus de génération de colonnes représentent des séparateurs du problème RWP, consistant à déterminer s'il existe des chemins et des *rounds* qui violent les contraintes de ce programme dual. Le premier problème auxiliaire consiste à déterminer l'existence d'un *chemin pondéré* violant la contrainte 3.7. Autrement dit, le chemin, pondéré par les variables duales associées aux arcs, doit être de poids inférieur à la variable duale associée à sa source. Les plus courts chemins pondérés des routeurs vers les points d'accès permettent donc toujours de savoir si une contrainte n'est pas violée, ou de fournir un bon candidat. Le cas échéant, ce chemin est ajouté à l'ensemble courant des variables du programme maître, car il permet d'en améliorer la valeur de l'objectif. De même, étant donnée la même pondération des variables duales, le deuxième problème auxiliaire consiste à calculer un ensemble de communications

compatibles de poids strictement supérieur à 1 (eq. 3.8). Dans notre cas, le stable de poids maximum du graphe des conflits est le séparateur adéquat. Il est à noter que calculer un *round* est *NP*-difficile sur des graphes généraux. Nous verrons par la suite qu'il ne s'agit pas là d'un enjeu majeur de complexité pratique.

La section suivante présente en détail ces deux programmes auxiliaires dans le processus de génération de colonnes appliqué à RWP.

3.3 Résolution par génération de colonnes

Nous appliquons maintenant la génération de colonnes sur la formulation en chemin/*round* de RWP présentée dans la section précédente. Cette méthode a été prouvée très efficace sur de tels problèmes d'optimisation [CFG07, LGR09]. Il s'agit alors de résoudre la relaxation continue de la formulation *chemin/round* sur des ensembles de chemins et de *rounds*, \mathcal{P}_0 et \mathcal{R}_0 , restreints. Afin de garantir l'existence d'une solution réalisable, nous choisissons $\mathcal{R}_0 = \{\{e\}, \forall e \in E\}$, et nous calculons un plus court chemin entre chaque routeur et un point d'accès. Ainsi, nous assurons l'existence d'un chemin pour router le trafic $d(v)$ d'un routeur $v \in V_r$ vers un point d'accès, dont chaque arc composant le chemin peut être activé $d(v)$ fois : $w(\{e\}) = d(v)$, pour chaque lien e du plus court chemin de v à un point d'accès.

Le processus de génération de colonnes a été présenté de manière générique dans la Section 3.1.2. Nous synthétisons son fonctionnement pour RWP sur la Figure 3.3. Nous présentons dans la suite les programmes auxiliaires qui ont pour but de générer les nouveaux chemins et *rounds* pouvant améliorer la valeur de la fonction objectif 3.4, ou certifier que nous avons atteint l'optimal.

3.3.1 Trouver un plus court chemin pondéré

Le problème auxiliaire associé aux chemins consiste à trouver un plus court chemin dans le graphe pondéré par les variables duales β_e . Etant donnée une solution optimale courante de RWP obtenue avec un ensemble restreint de variables, le problème auxiliaire associé aux chemins se définit de la façon suivante :

Définition 3.2 *Etant donnée une pondération $\beta : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, le problème de plus court chemin pondéré consiste à trouver un chemin $P \in \mathcal{P}$ tel que :*

$$\beta(P) = \sum_{e \in P} \beta_e$$

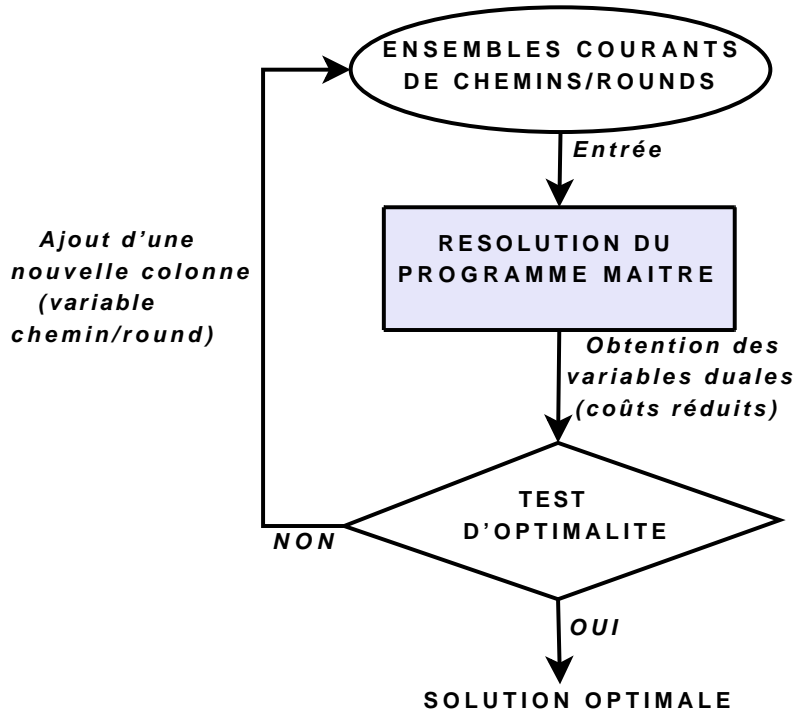


FIGURE 3.3 – Le processus de génération de colonnes appliqué au problème du routage et de l’ordonnancement dans les réseaux radio maillés.

est minimum sur \mathcal{P} .

Nous cherchons à minimiser le coût total d’un chemin $\beta^*(P)$ et ensuite vérifier que ce coût viole la contrainte 3.7 correspondante dans le programme dual, c’est-à-dire si $\beta^*(P) < \gamma_{\mathcal{O}(P)}$. Dans ce cas, cela signifie qu’un chemin améliorant le coût de la solution optimale a été trouvé ; celui-ci est donc ajouté à l’ensemble courant des variables du problème.

Comme nous sommes dans le cas d’un problème de plus court chemin, il peut être résolu efficacement. Nous développons néanmoins deux algorithmes : le premier est une formulation linéaire utilisant un flot, et le deuxième est une adaptation de l’algorithme de Dijkstra afin de générer en une seule itération un plus court chemin depuis chaque routeur vers un point d’accès.

3.3.1.1 Formulation linéaire

La première approche utilise la formulation classique en sommet/arc du problème du multiflot. Chaque source $v \in V_r$ dans G envoie 1 unité de trafic vers les points d'accès V_g , i.e. $d(v) = 1$. Le but est de trouver un plus court chemin entre chaque routeur source et un point d'accès. Comme le point d'accès destination n'est pas connu à l'avance, nous introduisons une variable binaire $k(r, g)$ pour chaque routeur $r \in V_r$ et $g \in V_g$, qui indique si la passerelle g reçoit l'unité de flot envoyée par r ou non. Nous devons tout de même spécifier la contrainte que seule une passerelle peut recevoir l'unité de flot. Rappelons que la variable $f(r, e)$ définit la quantité de flot envoyée par le routeur r passant sur le lien e , la formulation du problème auxiliaire est la suivante :

$$\begin{aligned} \min \sum_{r \in V_r} \sum_{e \in E} \beta_e f(r, e) \\ \sum_{e \in \Gamma_+(v)} f(r, e) - \sum_{e \in \Gamma_-(v)} f(r, e) &= \begin{cases} 1 & \text{if } v = r \\ -k(r, v) & \text{if } v \in V_g \\ 0 & \text{if } v \in V_r \setminus \{r\} \end{cases}, \quad \forall r \in V_r \\ \sum_{g \in V_g} k(r, g) &= 1, \quad \forall r \in V_r \\ k(r, g), f(r, e) &\in \{0, 1\}, \quad \forall g \in V_g, r \in V_r, e \in E \end{aligned}$$

Dans le cas de notre problème, nous avons remarqué que l'ensemble des variables duales β_e strictement positives était toujours de taille restreinte. Nous devons donc éviter que ce programme ne génère des chemins avec des circuits, car il est en effet possible d'ajouter des arcs *gratuits*, i.e. de poids β_e nul, dans la solution optimale. Pour cela, nous ajoutons une constante ε très petite au poids de chaque lien. La valeur de ε doit néanmoins être choisie prudemment, car il ne faut en aucun cas créer un meilleur chemin de poids $\sum_{e \in P} (\beta_e + \varepsilon)$ que les chemins *gratuits* de poids $\sum_{e \in P} \varepsilon$.

Par conséquent, en choisissant $\varepsilon = \frac{\min_{e \in E} \beta_e}{2|V|}$ sur les liens de poids $\beta_e > 0$, nous nous assurons que $\sum_{e \in P} \varepsilon < \beta_e, \forall e \in P$.

Cette formulation du problème auxiliaire associé aux chemins peut en fait être résolue en relâchant les variables $f(r, e)$ et $k(r, g)$. Si la solution trouvée est un chemin unique pour une source donnée, alors le flot sur ce chemin sera entier et

de valeur 1, donnant ainsi le même résultat que dans le cas entier. Si toutefois la résolution du programme relâché nous donne plusieurs chemins à partir d'une même source, alors nous prouvons dans le lemme suivant que tous les chemins ont le même poids fractionnaire.

Lemme 3.1 *Soient \mathcal{P}_s un ensemble de chemins de source s , et une fonction $f : \mathcal{P}_s \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $f(P) = \sum_{e \in P} f(s, e)$ et $f(e) = \sum_{P \ni e} f(P)$. Si*

$$f^* = \arg \min_f \sum_{e \in E} (\beta_e + \varepsilon) f(e),$$

alors $\forall P \in \mathcal{P}_s$ tel que $f^(P) > 0$,*

$$P = \arg \min_{\bar{P} \in \mathcal{P}_s} \sum_{e \in \bar{P}} \beta_e.$$

Preuve : Supposons qu'il existe deux chemins $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_s$, tels que $f^*(P_1) > 0$, $f^*(P_2) > 0$ et $\sum_{e \in P_1} \beta_e > \sum_{e \in P_2} \beta_e$. Nous avons donc $\sum_{e \in P_1} (\beta_e + \varepsilon) > \sum_{e \in P_2} (\beta_e + \varepsilon)$, puisque $\varepsilon > 0$.

Considérons maintenant un nouveau flot réalisable dans le réseau défini de la

$$\text{manière suivante : } f' = \begin{cases} f^* & \forall P \neq P_1, P_2 \\ 0 & \text{sur } P_1 \\ f^*(P_1) + f^*(P_2) & \text{sur } P_2 \end{cases}$$

Alors en calculant la valeur de ce nouveau flot, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} (\beta_e + \varepsilon) f'(e) &= \sum_{e \notin P_1, P_2} (\beta_e + \varepsilon) f^*(e) + (f^*(P_1) + f^*(P_2)) \sum_{e \in P_2} (\beta_e + \varepsilon) \\ &< \sum_{e \notin P_1, P_2} (\beta_e + \varepsilon) f^*(e) + f^*(P_1) \sum_{e \in P_1} (\beta_e + \varepsilon) \\ &\quad + f^*(P_2) \sum_{e \in P_2} (\beta_e + \varepsilon) \\ &< \sum_{e \in E} (\beta_e + \varepsilon) f^*(e) \end{aligned}$$

Nous arrivons donc à une contradiction puisque par définition : $f^* = \arg \min_f \sum_{e \in E} (\beta_e + \varepsilon) f(e)$.

Tous les chemins de \mathcal{P}_s ont donc le même poids. □

3.3.1.2 Algorithme de Dijkstra

Une autre approche pour résoudre le problème auxiliaire associé aux chemins serait d'utiliser l'algorithme de Dijkstra [Chv83] ou un algorithme de plus courts chemins entre toutes paires de sommets du graphe [CLR01]. Proposé par E. Dijkstra en 1959, l'algorithme du même nom permet de calculer efficacement les plus courts chemins orientés d'un nœud donné vers tous les autres nœuds du graphe. Il s'agit de construire progressivement, à partir du graphe pondéré initial, un sous-graphe dans lequel sont classés les différents sommets par ordre croissant de leur distance minimale au sommet de départ. La distance correspond à la somme des poids des arcs empruntés.

Notre but ici est de trouver, pour chaque routeur du réseau, un plus court chemin vers une passerelle de V_g . Comme l'algorithme de Dijkstra classique calcule les plus courts chemins d'un nœud vers tous les autres dans un graphe de n nœuds, il serait dans notre cas nécessaire de le faire tourner pour chacun des sommets de V_r , calculant par la même occasion des chemins entre deux routeurs qui ne nous intéressent pas. Afin d'accélérer la résolution et optimiser le calcul, nous modifions les paramètres d'entrée du problème afin d'appliquer en une seule fois l'algorithme de Dijkstra et obtenir une complexité en $\mathcal{O}(m + n \log(n))$.

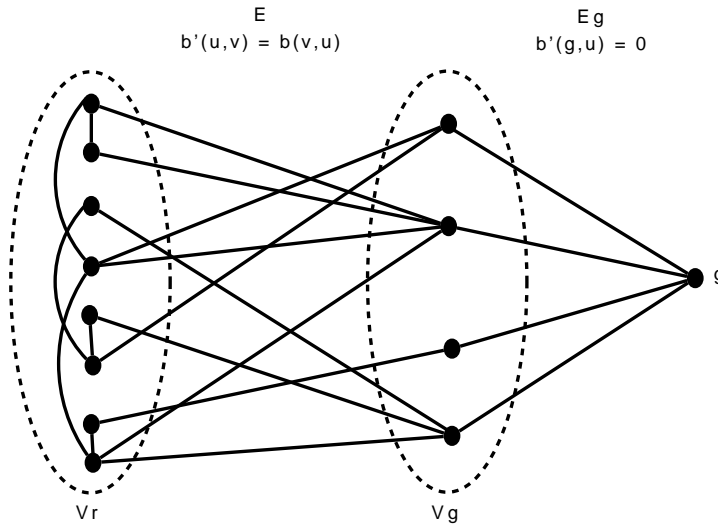


FIGURE 3.4 – Graphe G' modifié de G en ajoutant un sommet virtuel g correspondant au nœud source de l'algorithme de Dijkstra.

Rappelons que le graphe de connectivité $G = (V, E)$ modélisant le réseau

est considéré dans notre cas orienté symétrique. Grâce à cette dernière propriété, nous transformons G en un nouveau graphe $G' = (V' = V \cup \{g\}, E' = E \cup E_g)$ présenté dans la Figure 3.4. Dans ce nouveau graphe, g représente un nœud virtuel relié à tous les sommets de V_g par un ensemble d'arcs orientés vers V_g : $E_g = \{(g, u), \forall u \in V_g\}$. Chacun des liens de E_g a par définition un poids nul dans G' , i.e. $\beta'_e = 0, \forall e \in E_g$. Les arcs de E dans G' ont pour poids la valeur de la variable duale de l'arc opposé dans G , i.e. $\beta'_{(u,v)} = \beta_{(v,u)}$.

Nous appliquons donc l'algorithme de Dijkstra sur G' pondéré par β' afin de calculer les plus courts chemins pondérés depuis le sommet g vers tous les autres dans le graphe. Les plus courts chemins de V_r vers V_g pondérés par β dans G sont donc obtenus après une unique itération de l'algorithme ainsi défini. Plus précisément, nous obtenons des chemins depuis g vers $v, \forall v \in V_r$, qui minimisent $\sum_{e' \in E' \cap P} \beta'_{e'}$. Ces chemins correspondent à des chemins entre v et un point d'accès de V_g qui minimisent $\sum_{e \in E \cap P} \beta_e$ (puisque le lien entre le point d'accès et g est de poids nul). De plus, aucun chemin inutile ne sera calculé, ce qui permet d'accélérer au mieux la résolution de notre problème.

3.3.2 Trouver un *round* de poids maximum

Le deuxième problème auxiliaire, associé aux *rounds*, consiste à calculer un *round* qui viole la contrainte du programme dual qui lui est associée : trouver R tel que $\sum_{e \in R} \beta_e > 1$. Cela peut se définir de la manière suivante :

Définition 3.3 *Etant donné le graphe des transmissions $G = (V, E)$ et une pondération sur les arcs $\beta : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, le problème du round maximum consiste à trouver un round $R \in \mathcal{R}$ tel que :*

$$\beta_R = \sum_{e \in R} \beta_e$$

est maximum sur \mathcal{R} .

Générer un nouveau *round* dépend maintenant du modèle d'interférence choisi. D'après la définition des *rounds* dans un modèle d'interférence binaire (Section 2.1.3.2), le problème revient à calculer un stable maximum dans le graphe des conflits associé à G . Or, ce problème est *NP*-difficile [JPPQ03]. Il n'existe donc pas d'algorithme s'exécutant en temps polynomial pour résoudre ce problème auxiliaire, sauf si $P = NP$.

Nous présentons différentes approches, la première étant une formulation exacte en programmation linéaire, et la deuxième expérimentant une heuristique basée sur un algorithme glouton de construction de stables maximaux pour l'inclusion. Nous verrons par la suite qu'en pratique, la résolution de la formulation linéaire exacte dans le cas du modèle d'interférence binaire est très rapide.

3.3.2.1 Formulations linéaires exactes

A partir des modèles d'interférence présentés dans la Section 2.1.3, nous dérivons un programme linéaire pour calculer le *round* de poids maximum. Les arcs de G sont pondérés par les variables duales β_e obtenues après résolution du programme maître avec un nombre restreint de variables. La variable binaire $z(e)$ détermine si le lien e est choisi pour être dans le *round* calculé ou pas.

La formulation exacte modélisant le problème auxiliaire associé aux *rounds* dans le cas d'un modèle d'interférence binaire est la suivante :

$$\max \sum_{e \in E} \beta_e z(e)$$

$$\begin{aligned} z(e) + z(e') &\leq 1, \forall e \in E, e' \in \mathcal{I}_e \\ z(e) &\in \{0, 1\}, \forall e \in E \end{aligned}$$

Rappelons que \mathcal{I}_e représente l'ensemble des liens qui interfèrent avec e dans le réseau.

En considérant un modèle d'interférence SINR (Section 2.1.3.1), trouver un ensemble de liens compatibles équivaut à trouver une solution de la formulation suivante :

$$\max \sum_{e \in E} \beta_e z(e)$$

$$\sum_{e \in E_u} z(e) \leq 1, \forall u \in V$$

$$P_u H(u, v) z(u, v) \geq \gamma \cdot \left(\eta + \sum_{e'=(u',v') \neq (u,v)} P_{u'} H(u', v) z(e') \right), \forall (u, v) \in E$$

Ces programmes sont linéaires en nombres entiers et ne peuvent être relâchés car comme nous l'avons vu dans la Section 3.2.2, nous perdrons la propriété essentielle des *rounds* qui est de garantir que tous les liens du *round* peuvent être activés simultanément. Pour cela, nous développons une heuristique afin de calculer de manière rapide des *rounds* violant la contrainte 3.8.

3.3.2.2 Génération heuristique

Dans cet algorithme, nous générons de manière gloutonne des *rounds* maximaux pour l'inclusion dans le réseau, c'est-à-dire un *round* auquel il est impossible d'ajouter un nouveau lien sans que celui-ci n'interfère avec un lien déjà présent dans le *round*. En effet, la solution optimale de la formulation chemin/*round* initiale peut être atteinte en se restreignant uniquement à l'ensemble des stables maximaux pour l'inclusion \mathcal{R}_{max} . L'idée est que pour chaque *round* R dont la pondération $w(R)$ est strictement positive dans la solution optimale de RWP :

- (i) soit R est maximal pour l'inclusion,
- (ii) soit il existe un *round* maximal pour l'inclusion R_{max} contenant R . Dans ce cas, désactiver le *round* R et ajouter $w(R)$ au temps d'activation de R_{max} ne change pas la valeur de la solution optimale.

De plus, comme plusieurs *rounds* violent généralement la contrainte du programme dual correspondante, il est judicieux de pouvoir générer plusieurs *rounds* lors d'une itération du programme auxiliaire afin de limiter au mieux leur exécution. En effet, l'appel aux programmes auxiliaires est coûteux en temps de résolution, c'est pourquoi nous souhaitons trouver une solution optimale du problème avec un minimum d'appels aux programmes auxiliaires. Nous avons donc développé un algorithme glouton qui calcule rapidement un nombre fixé n de *rounds* maximaux. Cet algorithme permet d'obtenir rapidement des solutions approchées au problème du *round* maximum pondéré par les variables duales β (Algorithme 1).

En conclusion de cette section, le processus de génération de colonnes appliqué à RWP, ainsi que les programmes auxiliaires présentés, ont été implémentés en langage JAVA en utilisant la bibliothèque MASCOPT (Section 1.3) interfacée avec le logiciel de résolution de programmes linéaires CPLEX D'ILOG. Le diagramme des classes simplifié de l'implémentation est laissé en Annexe B de cette thèse pour plus de clarté.

Algorithme 1 : Génération de *rounds* pondérés maximaux

```

1: Ordonner les arcs  $e \in E$  tels que  $e_1$  est avant  $e_2$  si  $\beta_{e_1} \geq \beta_{e_2}$ 
2:  $Result \leftarrow \emptyset$ 
3:  $nbIt \leftarrow 1$ 
4: tant que  $nbIt \leq n$  faire
5:    $s_{nbIt} \leftarrow \{e_{nbIt}\}$ 
6:   pour  $i = nbIt$  to  $|E|$  faire
7:     si  $e_i$  n'interfère pas avec les éléments de  $s_{nbIt}$  alors
8:        $s_{nbIt} \leftarrow s_{nbIt} \cup \{e_i\}$ 
9:    $Result \leftarrow Result \cup s_{nbIt}$ 

```

3.4 Résultats et analyses

Des tests ont été réalisés sur un ensemble d'instances aléatoires que nous avons généré d'une manière particulière afin de refléter les propriétés que possèdent les réseaux radio maillés déployés en milieu urbain.

Un ensemble de n points est déployé sur une zone rectangulaire de longueur 1 et de hauteur $\frac{1}{4}$ selon un processus de Poisson. Un rayon de communication est ensuite calculé de sorte à assurer la connexité du réseau et un degré moyen \bar{d} proche de $\max(5, \frac{n}{10})$. En effet, dans les villes, un routeur maillé est généralement placé au niveau d'un carrefour de rues, de manière à communiquer avec plusieurs autres routeurs ou points d'accès. Il est donc nécessaire d'assurer une connexité suffisante dans le réseau afin de modéliser cette caractéristique. Nous avons généré des topologies de taille allant de 10 à 100 nœuds, avec des demandes en chaque routeur comprises entre 1 et 20 unités. Les passerelles sont choisies aléatoirement et uniformément parmi les points. Pour chaque topologie, nous avons lancé des tests pour un nombre de passerelles allant de 1 à $\frac{n}{d}$. Dans ce dernier cas, les passerelles ne communiquent en moyenne qu'avec leurs voisins. Si nous normalisons les distances entre les nœuds de telle sorte que le rayon de communication soit égal à 1, nous remarquons que ce processus génère des graphes poissonniens d'intensité $\frac{n}{10\pi}$. Les graphes sont donc localement denses, mais, du fait de la forme rectangulaire de la zone considérée, ils restent étalés. Cela permet d'éviter de générer des graphes sur des zones carrées pouvant ressembler à des grilles, et garder ainsi la propriété de graphe grande distance, comme peuvent l'être les réseaux radio maillés (Figure 3.5).

Tout d'abord, nous pouvons dire que la résolution par génération de colonnes

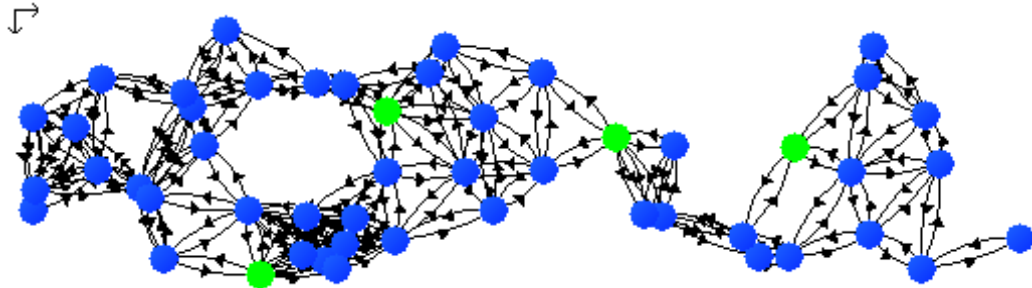


FIGURE 3.5 – Exemple de graphe aléatoire généré en utilisant MASCOPT.

est efficace pour RWP puisque nous résolvons des réseaux d’une centaine de nœuds en quelques minutes. Nous présentons dans la suite les résultats obtenus sur la capacité du réseau et des intuitions qui en découlent. Nous discutons notamment des questions de complexité.

3.4.1 Débit et taille du réseau

Les résultats sur la capacité des réseaux sans fil présentés dans la Section 1.1.2 nous permettent de valider notre méthode. En effet, nous voyons bien sur la Figure 3.6, que le débit disponible en chaque routeur du réseau radio maillé décroît en $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$ lorsque la taille du réseau, n , augmente. Des travaux sur la capacité des réseaux lors d’une collecte de données par une passerelle indiquent que le débit disponible en chaque routeur devrait décroître proportionnellement à l’inverse de la taille du réseau [BGK⁺06]. L’intuition naturelle est que le même phénomène apparaît lorsque plusieurs passerelles sont présentes. La Figure 3.6 confirme également cette intuition.

Dans les réseaux radio maillés, ce phénomène semble être expliqué par le fait que les passerelles collectent la totalité du trafic du réseau. La congestion se situe donc au niveau des points d’accès, où l’activation des liens est très contrainte. Cette intuition mène à une analyse détaillée du problème d’optimisation de la capacité de transport du réseau dans le chapitre suivant. Nous pouvons ainsi envisager des algorithmes bien plus efficaces se contentant d’optimiser autour des passerelles, et qui donnent de très bon résultats en terme de capacité. Les zones périphériques, c’est-à-dire celles situées hors de la zone de congestion des points d’accès, peuvent quant à elles être traitées par des processus rapides et peu précis (par exemple distribués et gloutons).

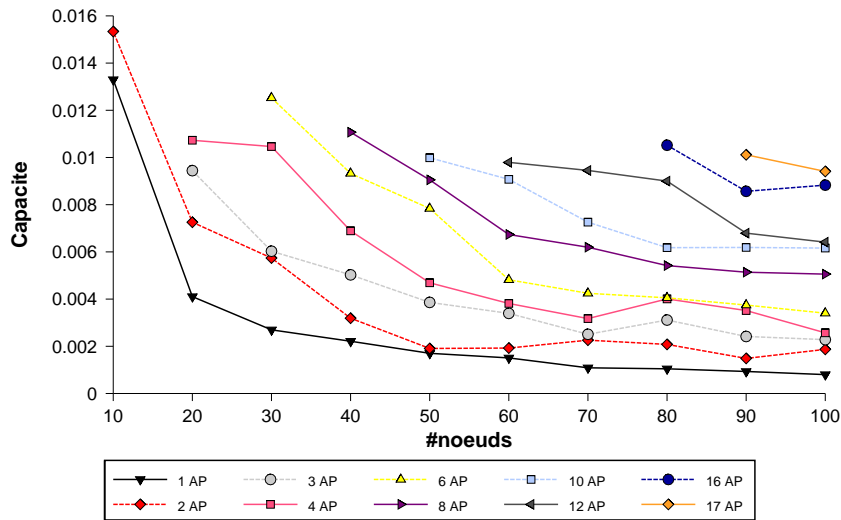


FIGURE 3.6 – Evolution de la capacité avec la taille du réseau.

Nous remarquons également un résultat très intéressant en pratique. Les tests montrent que la résolution du programme linéaire en nombres entiers calculant un *round* maximum pondéré est aussi rapide que celle de l'heuristique glouton ne générant que des *rounds* maximaux pour l'inclusion. L'intuition concernant l'existence d'une zone critique dans le réseau dans laquelle la capacité est contrainte, est appuyée par une complexité pratique de calcul des *rounds* sous-linéaire avec la taille du réseau, mais sensible au nombre de passerelles (et donc à la taille maximale des zones critiques).

3.4.2 Débit et densité de passerelles

La dépendance du débit à la densité des passerelles est moins claire a priori. Une dépendance linéaire est une borne supérieure évidente, puisqu'ajouter des nouveaux points d'accès dans le réseau radio maillé permet d'écouler plus de trafic, ou du moins cet ajout permet de mieux répartir le trafic à router, minimisant ainsi la longueur de la période de temps nécessaire au routage. Cette remarque doit néanmoins être nuancée par le fait que les interférences apparaissant entre les passerelles, qui sont plus nombreuses, pourraient dégrader les performances du réseau. Afin d'étudier ce phénomène, nous avons généré, pour chaque topologie,

plusieurs tirages aléatoires de positionnement des points d'accès. La Figure 3.7 présente la moyenne du gain obtenu en ajoutant des passerelles. Les valeurs sont normalisées par le débit obtenu avec une passerelle.

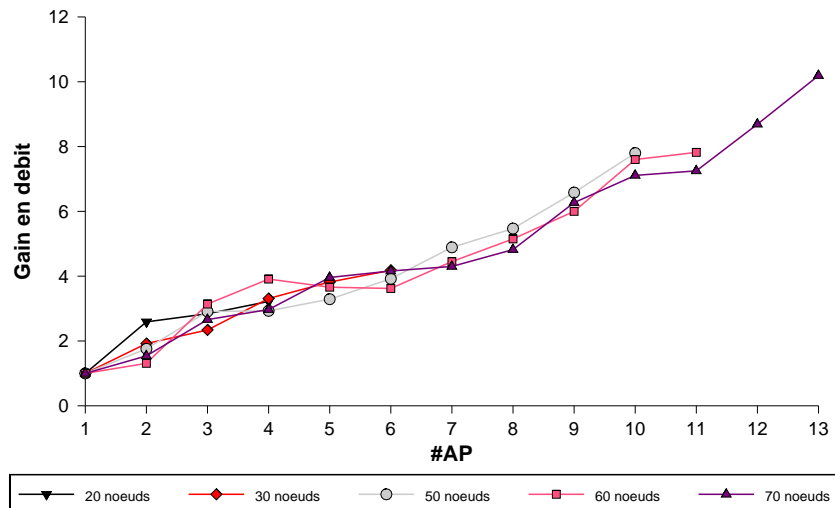


FIGURE 3.7 – Gain en débit par ajout de points d'accès.

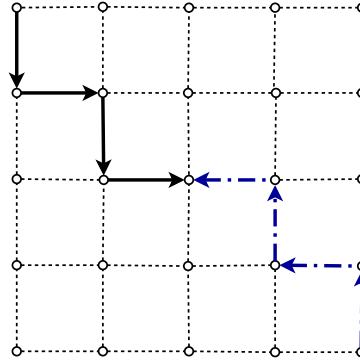
Ces résultats montrent un gain linéaire en fonction du nombre de passerelles, avec une pente légèrement inférieure à 1. Lorsque le placement est "correct", même non optimisé, les réseaux maillés se comportent efficacement. Un placement semble correct si les points d'accès sont placés assez loin les uns des autres. Lorsque deux passerelles sont trop proches l'une de l'autre, elles se comportent comme une seule ; les interférences radio les empêchant de collecter le trafic simultanément. En particulier, il a été montré que la capacité atteint un seuil lorsque le nombre de points d'accès devient très important dans le réseau [Oun08].

Nous pouvons clairement remarquer l'influence sur la capacité de la distance entre deux points d'accès placés sur une grille. Sur la Figure 3.8, nous présentons les résultats obtenus pour RWP lorsque nous calculons la quantité de flot que peut écouler la topologie en grille qui possède deux points d'accès. Dans cet exemple, la demande est fixée à 1 pour chaque routeur. Nous commençons par placer les deux points d'accès le plus loin possible l'un de l'autre dans la grille. Puis nous les rapprochons itérativement du centre, calculant pour chaque distance la longueur minimum de la période de temps nécessaire. Ce processus est testé sur différentes grilles : des grilles carrées de longueur de côté paire et impaire, et des grilles

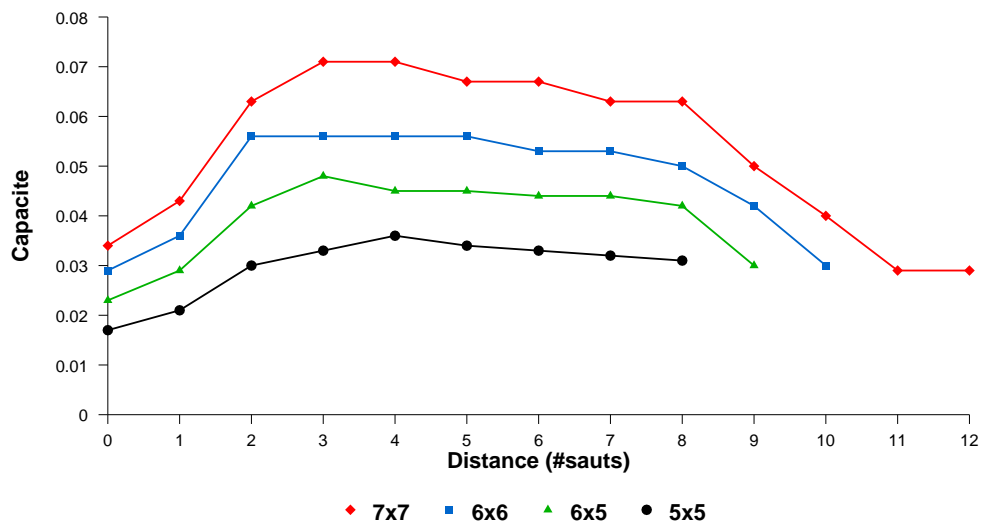
rectangulaires. Nous observons que pour chaque topologie, il existe une distance optimale entre les deux points d'accès pour la capacité du réseau. Mais une autre contrainte consiste également à placer ceux-ci loin du bord de la grille. En effet, lorsque les points d'accès sont trop proches du bord, alors le flot ne peut pas s'écouler de manière optimale puisque le nombre de liens incidents aux points d'accès, ou plus précisément à la région critique autour d'eux où se concentre le trafic, est limité. Néanmoins, lorsque les deux points d'accès sont assez loin du bord, et également assez loin l'un de l'autre, alors la capacité du réseau est maximisée. En dehors de ces contraintes, le placement précis des points d'accès n'a pas d'impact sur la capacité. Cela permet d'envisager des optimisations secondaires telles que le délai d'acheminement des paquets ou l'homogénéité de la longueur des routes.

Nous conjecturons ici qu'une distance minimale autour de chaque passerelle est non seulement nécessaire mais aussi suffisante à un écoulement correct du trafic. Cette distance devrait dépendre de la taille et de la connexité de la zone critique autour des points d'accès.

La formulation en chemin/*round* présentée dans ce chapitre introduit de nouvelles hypothèses concernant des propriétés de localité dans les réseaux radio maillés. Une optimisation à partir d'informations locales autour des points d'accès semble être une condition nécessaire, voire suffisante, au bon fonctionnement du réseau. L'analyse de ces hypothèses constitue l'étude principale du chapitre suivant.



(a) Placement de 2 points d'accès sur la grille, depuis les 2 coins opposés jusqu'au plus près du centre.



(b) Capacité en fonction de distance entre les points d'accès.

FIGURE 3.8 – Etude de l'influence de la distance entre 2 passerelles sur la capacité du réseau radio maillé en grille.

Optimisation à partir d'informations locales

Dans un réseau radio maillé, chaque point d'accès collecte le trafic d'une partie du réseau, deux régions rattachées à des points d'accès suffisamment distants n'interférant entre elles qu'à la marge. L'influence du placement des points d'accès dans le réseau sur ses performances, ainsi que le routage concentrant le trafic vers ces points d'accès tout en minimisant les interférences radio, sont donc des axes de recherche importants. Le compromis entre des régions de taille minimale et des frontières avec peu d'interférence est au cœur de l'optimisation de la qualité de service des réseaux radio maillés [CQJM04, ABIK06].

Dans ce chapitre, nous nous intéressons plus particulièrement à la capacité de transport disponible sur les coupes du réseau. Nous pouvons ainsi nous affranchir du routage afin de mettre en évidence une caractéristique topologique spécifique des réseaux radio maillés, à savoir que la capacité est contrainte dans une zone du réseau située autour des points d'accès qui collectent le trafic.

En programmation linéaire, le problème du flot est très lié à celui de pondération de coupes. Par exemple, écouler un flot de valeur f entre les sommets s et d en utilisant un nombre minimum d'arêtes revient à couvrir f fois toutes les coupes séparant s de d avec un nombre minimum d'arêtes. À partir de cette remarque, nous introduisons une nouvelle formulation du problème d'optimisation de la capacité des réseaux radio maillés consistant à couvrir les coupes du réseau (ne contenant pas les points d'accès) par les *rounds*, de manière à assurer une capacité suffisante sur les liens du bord des coupes. Les demandes des utilisateurs en chaque routeur pourront ainsi être supportées par ces liens jusqu'aux points d'accès. Nous prouvons l'équivalence des solutions optimales avec la formulation chemin/*round* du chapitre précédent, en utilisant le théorème de *flot maximum - coupe minimum*.

Nous introduisons dans la section suivante le théorème flot maximum - coupe minimum, démontré en 1956, qui nous sera utile lors de la validation de notre formulation linéaire coupe/*round*. Cette dernière est présentée dans la Section 4.2,

suivie de la preuve de l'équivalence des solutions optimales de cette formulation coupe/round, avec la formulation chemin/round du chapitre précédent. La Section 4.3 décrit le processus de génération croisée de lignes et de colonnes utilisé pour résoudre ce problème. Les performances de la méthode, la mise en évidence de la zone de contention autour des points d'accès, et ses conséquences sur le temps de résolution du problème sont présentés dans la Section 4.4.

4.1 Flot maximum - Coupe minimum

Dans cette première section, nous rappelons le théorème du flot maximum - coupe minimum de la théorie des graphes qui révèle que la capacité d'une coupe minimum est égale à la valeur d'un flot maximum dans un graphe orienté pondéré [Chv83, CCPS97, CLR05]. Ce théorème est à la base de nombreuses applications pour la planification, la conception de circuits, et bien sur les télécommunications.

4.1.1 Le problème du flot maximum

Soient $G = (V, A)$ un graphe orienté, s un sommet source, d un sommet destination, et c une pondération positive des arcs : $c : A \rightarrow \mathbb{R}^+$, le problème du flot maximum dans un réseau consiste à trouver une fonction $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les lois de conservation de flot (ou lois de Kirchhoff) en tout sommet de G excepté s et d :

$$\sum_{w \in V} \phi(w, u) = \sum_{v \in V} \phi(u, v), \quad \forall u \in V \setminus \{s, d\}. \quad (4.1)$$

Cette équation reflète le fait qu'aucun flot ne se perd en passant par des nœuds intermédiaires du réseau. Le flot qui entre dans le réseau par le sommet source doit avoir la même valeur que celui qui en sort par le sommet destination :

$$\sum_{w \in V} \phi(s, w) = \sum_{v \in V} \phi(v, d). \quad (4.2)$$

Chaque somme de cette équation définit par ailleurs la notion de *valeur du flot*.

Finalement, un flot ϕ est dit *réalisable* s'il vérifie de plus :

$$0 \leq \phi(u, v) \leq c(u, v), \quad \forall (u, v) \in A \quad (4.3)$$

L'objectif du problème de flot maximum consiste à trouver un flot réalisable de plus grande valeur. L'algorithme très connu pour résoudre le problème du flot maximum est celui de Ford et Fulkerson [FF62]. Il est basé sur la recherche d'une *chaîne augmentante* dans le graphe, c'est-à-dire un chemin entre s et d tel qu'il soit possible de modifier le flot sur les arcs de ce chemin et augmenter la valeur du flot. Ce problème de flot maximum connaît de nombreuses applications dans les problèmes de réseaux impliquant une limite sur la capacité, et dans les problèmes d'ordonnancement de tâches (travaux/machines, programmes/processeurs).

4.1.2 Lien avec la coupe minimum

Le problème du flot maximum est posé en terme de chemins allant de s à d . Il peut également être approché en terme de coupes séparant s de d . Dans un réseau, une telle coupe, appelée s - d -coupe, est un ensemble C de nœuds qui contient la source s mais pas la destination d . Le bord de la coupe est noté (C, \overline{C}) et contient tous les arcs dont l'origine se trouve dans C et l'extrémité dans son complémentaire $\overline{C} = V \setminus C$. La capacité d'une coupe C est définie par $c(C) = \sum_{e \in (C, \overline{C})} c(u, v)$.

Si C est une s - d -coupe et ϕ un flot de valeur $f = \sum_{w \in V} \phi(s, w)$, alors en additionnant les contraintes de conservation de flot 4.1 sur les sommets de la coupe C , le flot peut s'écrire :

$$\begin{aligned} f &= \sum_{u \in C} \left(\sum_{(u,v) \in A} \phi(u, v) - \sum_{(v,u) \in A} \phi(v, u) \right) \\ &= \sum_{w \in C} \phi(v, w) + \sum_{w \notin C} \phi(v, w) - \sum_{u \in C} \phi(u, v) - \sum_{u \notin C} \phi(u, v) \end{aligned}$$

Après simplification, cela se réécrit :

$$f = \sum_{e \in (C, \overline{C})} \phi(e) - \sum_{e \in (\overline{C}, C)} \phi(e) \quad (4.4)$$

L'interprétation de cette équation est que la valeur du flot dans le réseau est égale à la différence entre la quantité de flot qui doit sortir de la coupe C et celle qui y entre. En particulier, nous retrouvons la définition de la valeur du flot présentée dans l'équation 4.2 lorsque C correspond respectivement à la coupe réduite au sommet source s , et à celle composée des nœuds de $V \setminus \{d\}$.

En bornant supérieurement le membre de droite, nous obtenons $f \leq c(C)$,

pour toute s - d -coupe C . L'équation 4.4 implique que pour tout flot réalisable dans le réseau, sa valeur est au plus égale à la capacité d'une coupe séparant s de d . En particulier, la capacité d'une s - d -coupe est une borne supérieure de la valeur du flot entre s et d . Et inversement, un flot entre s et d est une borne inférieure sur la capacité d'une s - d -coupe. Si nous disposons d'un flot ϕ de valeur f et d'une s - d -coupe C de capacité $c(C) = f$, alors le flot est maximum et la coupe est de capacité minimum.

4.1.3 Le théorème flot maximum - coupe minimum

La question qui a donné lieu au théorème important en théorie des graphes est maintenant la suivante : existe-t-il toujours une telle paire flot-coupe pour laquelle l'égalité est atteinte ?

Théorème 4.1 (Flot maximum - Coupe minimum [Chv83]) *Tout problème de flot maximum entre deux sommets s et d d'un graphe orienté $G = (V, A)$ dans lequel les arcs sont pondérés par une fonction $c : A \rightarrow \mathbb{R}^+$, possède exactement l'une de ces deux propriétés :*

- (i) *Il existe des flots réalisables de valeur arbitrairement large et toute s - d -coupe a une capacité infinie.*
- (ii) *Il existe un flot maximum et sa valeur est égale à la capacité minimum d'une s - d -coupe.*

Ce théorème fut démontré indépendamment par P. Elias, A. Feinstein, et C. E. Shannon, ainsi que par L. R. Ford et D. R. Fulkerson, et dans le cas de capacités entières par A. Kotzig, en 1956. Il existe de nombreuses variantes et généralisations de ce théorème qui s'est avéré très utile dans de nombreuses applications. Nous allons par ailleurs l'utiliser dans notre problème d'optimisation des réseaux radio maillés afin de déterminer le flot maximum que peut écouler la topologie dans le cas où les demandes doivent être routées des routeurs vers les points d'accès en tenant compte des interférences radio.

4.2 Une nouvelle formulation de RWP

Etant donné le graphe de transmission orienté symétrique $G = (V, E)$ modélisant le réseau radio maillé et le trafic $d(v)$ en chaque routeur $v \in V$, le problème que nous étudions consiste à s'assurer qu'il existe une capacité suffisante dans le réseau pour écouler le trafic jusqu'aux points d'accès. Cette capacité

est calculée par une couverture, par les *rounds*, des coupes du graphe isolant les points d'accès.

Dans la suite, nous notons $\mathcal{C} \subseteq 2^V$ l'ensemble des coupes du graphe isolant les points d'accès. En d'autres termes, une coupe est un ensemble $C \in \mathcal{C}$ de sommets ne contenant aucun point d'accès. Le bord de C , noté (C, \bar{C}) , est l'ensemble des arcs sortants de C vers son complémentaire $\bar{C} = V \setminus C$. Un exemple de coupe telle que nous venons de la définir est représentée sur la figure 4.1.

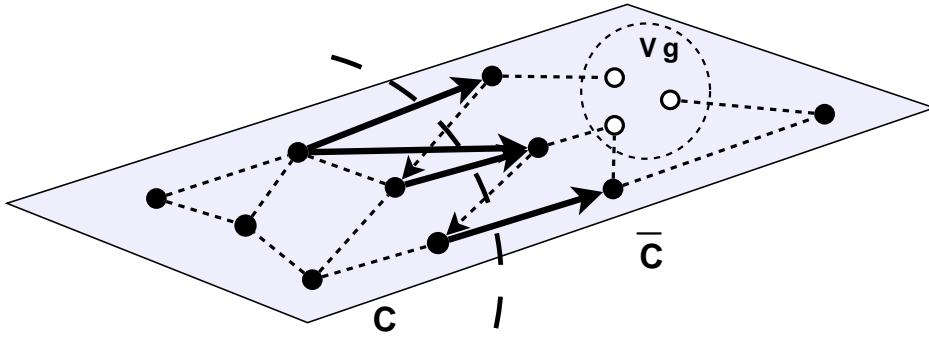


FIGURE 4.1 – Une coupe C dans le graphe G isolant les points d'accès (ensemble V_g). Le bord (C, \bar{C}) de la coupe est représenté par les arcs en gras.

Nous définissons alors le trafic d'une coupe $d(C) = \sum_{v \in C} d(v)$ comme étant le trafic total devant traverser son bord. De même, la capacité d'une coupe induite par une pondération des *rounds* w est égale à la somme des capacités des liens de son bord : $c_w(C) = \sum_{e \in (C, \bar{C})} c_w(e)$. La capacité des liens étant donnée par la pondération des *rounds* (Section 3.2), la capacité d'une coupe peut s'exprimer en fonction de celle-ci de la manière suivante :

$$c_w(C) = \sum_{R \in \mathcal{R}} \delta(R, C) w(R)$$

où $\delta(R, C) = |R \cap (C, \bar{C})|$ correspond au nombre de fois où le *round* R couvre le bord de la coupe C .

Dès lors, s'assurer qu'il existe une capacité suffisante dans le réseau pour écouler le trafic consiste à couvrir les coupes du réseau isolant les points d'accès par les *rounds* de manière à assurer le transport du trafic de chaque coupe sur les liens de son bord. Une fois la solution optimale obtenue, le théorème du flot maximum - coupe minimum assure l'existence d'un routage satisfaisant les demandes des routeurs.

4.2.1 Formulation coupe/round

Soit w une fonction de poids définie sur l'ensemble des *rounds* \mathcal{R} , le problème de couverture des coupes par les *rounds* CCP défini ci-dessus s'exprime de la manière suivante :

$$\min \sum_{R \in \mathcal{R}} w(R) \quad (4.5)$$

$$\sum_{R \in \mathcal{R}} \delta(R, C) w(R) \geq d(C) \quad \forall C \in \mathcal{C} \quad (4.6)$$

$$w(R) \geq 0 \quad \forall R \in \mathcal{R} \quad (4.7)$$

L'objectif de ce programme linéaire est de maximiser la capacité du réseau fonctionnant en régime permanent, c'est-à-dire à déterminer une couverture des coupes suffisante pour que le trafic de celles-ci puisse traverser leur bord sur des liens pouvant être activés en un minimum de temps. Comme nous l'avons défini dans le chapitre précédent, w est une pondération fractionnaire des *rounds*, correspondant à la durée d'activation de chacun d'eux au cours de la période du réseau. La capacité de transport d'une coupe est déterminée par la couverture des liens de son bord par les *rounds* comme présenté ci-dessus. Elle doit être suffisamment importante pour garantir que le trafic des nœuds de la coupe puisse traverser son bord afin d'atteindre les points d'accès du réseau. Cette propriété est modélisée par l'ensemble des contraintes 4.6 qui peut être vu comme l'ensemble des contraintes de satisfaction de la demande dans le cas de la formulation avec du flot du chapitre précédent. La fonction objectif 4.5 reste la même que pour le problème RWP où la longueur de la période du réseau est minimisée, afin de garantir un débit suffisant en régime permanent.

4.2.2 Equivalence des solutions

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que le problème du routage dans les réseaux radio maillés, dans le cas où le point d'accès destination n'est pas spécifié, peut se ramener à un problème de simple flot maximum avec une unique paire (source, destination). Nous utilisons cette propriété et le Théorème 4.1 pour démontrer l'équivalence des pondérations des *rounds* pour CCP et RWP.

Etant donné une solution w du problème de pondération des *rounds* introduit dans la Section 3.2, nous transformons le graphe des transmissions G en un graphe associé (G', w) représenté sur la Figure 4.2 et défini de la manière suivante :

Définition 4.1 (Graphe associé (G', w)) Soit $G' = (V', E')$ le graphe pondéré construit à partir du graphe des transmissions G et d'une pondération w sur les rounds \mathcal{R} de G de la façon suivante :

- (i) Une source virtuelle v_S est ajoutée, reliée par des liens (v_S, v) , $\forall v \in V_r$ de capacité $d(v)$,
- (ii) Une destination virtuelle v_D est ajoutée, reliée à chacun des points d'accès $v \in V_g$ par des liens de capacité infinie,
- (iii) Pour tout lien $e \in E$, e a pour capacité $c_w(e) = \sum_{e \ni R} w(R)$.

Donc $V' = V \cup \{v_S, v_D\}$ et $E' = E \cup \{(v_S, v), \forall v \in V_r\} \cup \{(v, v_D), \forall v \in V_g\}$.

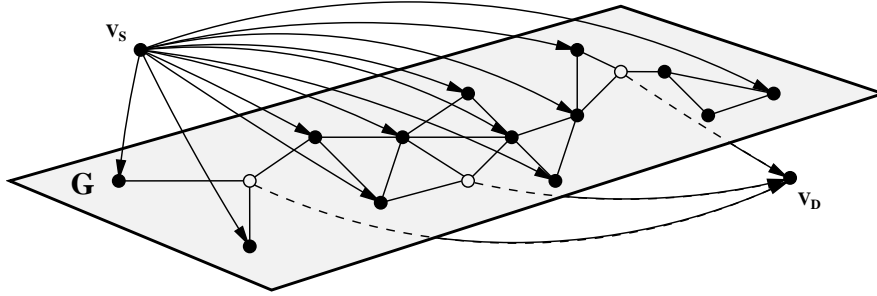


FIGURE 4.2 – Le graphe associé (G', w) qui étend le graphe des transmissions G .

Cette transformation n'est pas nécessaire mais permet de manipuler plus aisément le Théorème 4.1. Ainsi, les contraintes de flot $c_w(e) \geq \sum_{e \ni P} f(P)$ sont respectées si et seulement si la v_S - v_D -coupe minimum de G' est supérieure à $d(V_r) = \sum_{v \in V_r} d(v)$, le trafic total devant être transporté vers les points d'accès. Nous pouvons en effet remarquer que la v_S - v_D -coupe minimum dans G' , si elle existe, ne contient aucun point d'accès puisque les arcs (v, v_D) pour tout $v \in V_g$ ont capacité infinie.

A partir de là, nous prouvons l'équivalence des solutions optimales de notre formulation de couverture des coupes avec celle définie à partir du flot dans le chapitre précédent pour RWP. Plus précisément, le programme linéaire précédent du problème CCP calcule une pondération des rounds de sorte que la capacité de chaque coupe soit supérieure à la quantité de trafic qui doit traverser son bord. Le théorème suivant assure que ces capacités sont nécessaires et suffisantes à l'existence d'un routage du trafic dans le réseau.

Théorème 4.2 Les formulations chemin/round RWP et coupe/round CCP calculent des pondérations de rounds équivalentes.

Preuve : Rappelons ici la formulation RWP en chemin/round :

$$\begin{aligned} \min \sum_{R \in \mathcal{R}} w(R) \\ \sum_{P \ni e} f(P) &\leq \sum_{R \ni e} w(R), \forall e \in E \\ \sum_{P \in \mathcal{P}_r} f(P) &= d(r), \forall r \in V_r \end{aligned}$$

Soit w_1 une solution réalisable de cette formulation. Il existe donc un flot f réalisable dans G et, pour toute coupe C isolant les points d'accès, la conservation du flot assure que la capacité de C est supérieure au flot émis par les sommets de C car il doit nécessairement traverser son bord en direction des points d'accès (d'après l'équation 4.4) :

$$c_{w_1}(C) = \sum_{e \in (C, \overline{C})} c_{w_1}(e) \geq \sum_{e \in (C, \overline{C})} \sum_{P \in \mathcal{P}, e \in P} \Phi(P) \geq \sum_{v \in C} d(v).$$

En injectant w_1 dans la formulation CCP, nous obtenons donc une solution réalisable puisque

$$\forall C, \sum_{R \in \mathcal{R}} \delta(R, C) w_1(R) = c_{w_1}(C) \geq d(C).$$

En particulier, les pondérations optimales de RWP sont des bornes supérieures pour CCP.

Inversement, soit w_2 une solution réalisable de la formulation coupe/round. Soit C^* une coupe de capacité minimale séparant v_S de v_D dans le graphe modifié (G', w_2) . Il existe une unique coupe C de G telle que $C^* = \{v_S\} \cup C$ et $(C^*, \overline{C^*}) = \{(v_S, v), v \in \overline{C}\} \cup (C, \overline{C})$. Notons que les points d'accès sont nécessairement dans \overline{C} puisque la capacité des arcs les reliant à v_D est infinie.

La capacité de C^* est alors :

$$c_{w_2}(C^*) = \sum_{v \in \overline{C}} c_{w_2}((v_S, v)) + \sum_{e \in (C, \overline{C})} c_{w_2}(e) = \sum_{v \in \overline{C}} d(v) + c_{w_2}(C).$$

La contrainte de couverture de la formulation coupe/round assure que

$c_{w_2}(C) \geq d(C) = \sum_{v \in C} d(v)$, et donc $c_{w_2}(C^*) \geq \sum_{v \in V_r} d(v)$. Le théorème flot maximum - coupe minimum garantit alors l'existence d'un flot dans (G', w_2) , donc d'une solution de RWP.

En particulier, les pondérations optimales de CCP bornent supérieurement celles de RWP, ce qui complète l'équivalence entre les solutions des formulations en chemin/*round* et coupe/*round*. \square

A partir d'une pondération w solution du programme linéaire CCP, il est alors possible de construire le graphe associé (G', w) et calculer un flot maximum dans ce graphe de valeur $\sum_{v \in V_r} d(v)$ entre la source virtuelle v_S et la destination virtuelle v_D . L'algorithme de Ford et Fulkerson basé sur les chaînes augmentantes [FF62], ou l'algorithme de flot *push/relabel* introduit par Goldberg et Tarjan [GT88], permettent de calculer un ensemble de chemins depuis chaque routeur $v \in V_r$ vers les points d'accès V_g en temps polynomial.

4.3 Algorithme primal-dual : génération croisée de lignes et colonnes

La génération de colonnes a déjà été utilisée pour les problèmes de routage et d'ordonnancement dans les réseaux radio pour lesquels elle a montré son efficacité. Ces problèmes souffrent du nombre exponentiel des variables associées aux *rounds*. L'ensemble des *rounds* dans le réseau est un sous-ensemble de 2^E , ce qui en rend impossible l'énumération complète. La génération de colonnes permet dans ce cas, d'obtenir la solution optimale du problème en ne calculant que les *rounds* susceptibles d'améliorer la solution à chaque étape (Chapitre précédent).

Dans ce chapitre, la formulation coupe/*round* de CCP ne possède pas uniquement un nombre exponentiel de variables (toujours dû aux *rounds*), mais également un nombre exponentiel de contraintes puisque nous avons une contrainte par coupe dans G ne contenant aucun point d'accès. La méthode correspondante à la génération de colonnes pour la résolution de programmes linéaires possédant un nombre exponentiel de contraintes est la *génération de lignes*.

Afin de résoudre notre formulation coupe/*round*, nous devons donc combiner ces deux approches. Pour manipuler de telles tailles efficacement, nous développons un algorithme primal-dual implémentant un processus de génération croisée de lignes et de colonnes. Le principe de ce processus consiste, à partir d'une solution optimale du problème restreint à un sous-ensemble de lignes et de

colonnes, à chercher à chaque itération une ligne ou une colonne à ajouter pour améliorer la solution.

4.3.1 Dualité et problèmes auxiliaires

Dans la formulation coupe/round, une ligne correspond à une contrainte violée par la solution courante. Une contrainte est violée si une coupe est de capacité trop faible : si $\sum_{R \in \mathcal{R}} \delta(R, C)w(R) < d(C)$ pour une solution donnée w . La génération d'une ligne peut donc se faire par un calcul de coupe minimale (en fonction des capacités induites par w). Si la capacité de la coupe minimum est supérieure à la valeur du trafic de la coupe, alors nous assurons qu'aucune coupe ne viole la contrainte du programme linéaire 4.5-4.7, autrement, la résolution de l'algorithme de coupe minimum nous fournit un candidat à ajouter à l'ensemble courant de contraintes.

Cet algorithme de coupe minimum, que nous appelons *programme auxiliaire associé aux coupes*, cherche à calculer des nouvelles lignes (i.e. contraintes) de notre programme susceptibles d'améliorer la valeur de la solution. Plusieurs algorithmes de ce type existent dans la littérature [PR90, SW97], et il a été montré que le problème associé est unimodulaire, c'est-à-dire que le problème entier et le problème réel sont équivalents. Nous choisissons donc de développer une formulation linéaire entière de ce problème qui cherche à identifier la contrainte la plus violée en terme absolu, c'est-à-dire lorsque le manque de capacité sur les liens du bord de la coupe est maximum. Etant donnée la pondération w donnée par la solution optimale obtenue avec l'ensemble courant de variables et de contraintes, $z(e) \in \{0, 1\}$ indique si un lien $e \in E$ se situe sur le bord de la coupe que nous cherchons à calculer ou non, et $k(v) \in \{0, 1\}$ indique si un nœud $v \in V$ est sélectionné pour être dans la coupe ou non. Le problème auxiliaire associé aux coupes peut alors se définir formellement de la manière suivante :

Définition 4.2 *Etant donnée une pondération $w : R \rightarrow \mathbb{R}^+$, le problème de coupe minimum pondérée consiste à trouver une coupe $C \in \mathcal{C}$ telle que :*

$$z(C) = \sum_{e \in (C, \overline{C})} c_w(e) - \sum_{v \in C} d(v)$$

est minimum sur \mathcal{C} .

En effet, la contrainte 4.6 peut s'écrire de différentes manières équivalentes :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{R \in \mathcal{R}} \delta(R, C) w(R) \geq d(C) \\
 \Leftrightarrow & \sum_{R \in \mathcal{R}} \sum_{e \in R \cap C} c_w(e) \geq d(C) \\
 \Leftrightarrow & \sum_{R \in \mathcal{R}, e \in R \cap C} c_w(e) - d(C) \geq 0
 \end{aligned}$$

C'est pourquoi la solution du problème auxiliaire associé aux coupes tel que défini ci-dessus permet de déterminer s'il existe une coupe dans le graphe qui viole cette contrainte, ou s'assurer qu'aucune coupe vérifiant cette condition n'existe.

La formulation entière du problème de coupe minimum pondérée est donc la suivante :

$$\min \sum_{e \in E} c_w(e) z(e) - \sum_{v \in V_r} d(v) k(v) \quad (4.8)$$

$$k(u) - k(v) \leq z(u, v) \quad \forall (u, v) \in E \quad (4.9)$$

$$\sum_{v \in V_g} k(v) = 0 \quad (4.10)$$

La fonction objectif 4.8 cherche donc à minimiser la différence entre la capacité de la coupe (i.e. la somme des capacités induites par w des liens de son bord), et la trafic de la coupe (i.e. la somme des trafic des routeurs contenus dans la coupe). Le premier ensemble de contraintes 4.9 détermine si un lien du graphe doit être compté comme faisant partie du bord de la coupe, afin de pouvoir ajouter sa capacité induite dans la première partie de la fonction objectif. Un lien ne peut faire partie du bord que si son origine est dans la coupe et sa destination n'y est pas. La contrainte 4.10 force la variable de sélection des points d'accès à 0. Autrement dit, la coupe calculée ne doit contenir aucun points d'accès comme cela a été défini au départ dans notre problème.

Une colonne correspond ici à une variable de la formulation coupe/round de la Section 4.2.1, i.e. un *round*, dont la valeur dans la solution courante est implicitement nulle, et que nous souhaitons introduire explicitement dans l'ensemble des variables. Pour cela, nous devons identifier les nouvelles colonnes susceptibles d'améliorer la solution à l'aide du programme dual. Le programme linéaire

suivant représente donc le dual de CCP. Il consiste à emballer les coupes pondérées par les variables duales ρ_C associée aux contraintes 4.6 dans des *rounds* de capacité inférieure ou égale à 1, de manière à maximiser un profit basé sur le trafic des coupes :

$$\max \sum_{C \in \mathcal{C}} \rho_C d(C) \quad (4.11)$$

$$\sum_{C \in \mathcal{C}} \delta(R, C) \rho_C \leq 1 \quad \forall R \in \mathcal{R} \quad (4.12)$$

$$\rho_C \geq 0 \quad \forall C \in \mathcal{C} \quad (4.13)$$

La fonction objectif 4.11 peut se voir comme une maximisation du coût du trafic, en se basant sur un coût de traversée du bord de chaque coupe. Le poids d'un *round*, défini dans la contrainte 4.12, correspond au coût des bords des coupes traversés. Une contrainte 4.12 n'est pas satisfaite si un *round* a un poids induit supérieur à 1. Générer une colonne de la formulation coupe/*round* se fait en identifiant la contrainte 4.12 la plus violée lorsque ρ_C est donné par les coûts réduits issus de la solution courante de CCP. Générer un *round* de poids maximum étant donnée une pondération sur les coupes permet d'obtenir un bon candidat, i.e. une colonne, à ajouter à l'ensemble des variables du programme CCP, ou certifier qu'une telle colonne n'existe pas :

Définition 4.3 *Etant donnée une pondération $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$, le problème de *round* maximum pondéré consiste à trouver un *round* $R \in \mathcal{R}$ tel que :*

$$y(R) = \sum_{e \in R} \left(\sum_{C \in \mathcal{C}} \delta(R, C) \rho_C \right)$$

est maximum sur \mathcal{R} .

Le second programme auxiliaire, celui associé aux *rounds*, peut être formulé comme dans le chapitre précédent en un programme linéaire en nombres entiers. Dans ce programme, $z(e) \in \{0, 1\}$ est une variable binaire indiquant si le lien $e \in E$ est sélectionné dans le *round* ou non. L'objectif est de maximiser le poids du *round*, c'est-à-dire la somme des poids des liens constituant le *round*. Le poids d'un lien dans ce cas précis est donné par les coûts réduits ρ sur les coupes : $c_\rho(e) = \sum_{C \in \mathcal{C}, e \in (C, \bar{C})} \rho_C$. Les contraintes du programme linéaire définissent la structure d'un *round* qui dépend du modèle d'interférence choisi.

Ce sont les mêmes que celles décrites dans les formulations linéaires de la Section 3.3. Seule la fonction objectif change par rapport au problème auxiliaire du chapitre précédent. Sa valeur n'est plus pondérée par les coût réduits sur les liens du graphe, mais par ceux sur les coupes :

$$\max \sum_{e \in E} c_p(e) z(e)$$

Si le coût du *round* généré est strictement supérieur à 1, alors une nouvelle colonne est maintenant ajoutée à l'ensemble des variables courantes de la formulation coupe/*round*.

Le problème du *round* de poids maximum est un problème *NP*-difficile, il en est de même pour son approximation sur un graphe général. Étonnamment, cette formulation en nombres entiers se résout rapidement et nous renvoie la solution optimale quasi instantanément. Nous verrons dans la Section 4.4 que les tests effectués sur des graphes euclidiens et des grilles, nous permettent d'avancer que la complexité n'est pas un problème majeur en pratique de la résolution de RWP et CCP.

Le processus de génération croisée de lignes et de colonnes est un algorithme primal-dual présenté dans la section suivante, et synthétisé sur la Figure 4.3.

4.3.2 L'algorithme primal-dual

Le processus de génération croisée se fonde sur un algorithme primal-dual présenté dans l'Algorithme 2. Il consiste à opérer une génération de lignes classique, à ceci près que le calcul d'un optimum intermédiaire se fait grâce à la génération des colonnes. A la fin de ce processus la solution optimale est trouvée en application du théorème $SEP = OPT$ sur le dual 4.11- 4.13 puis sur le primal 4.5- 4.7 [GLS81].

Formellement, l'algorithme débute en résolvant le programme CCP avec une unique contrainte correspondant à la coupe du graphe isolant les points d'accès : l'ensemble $\mathcal{C}_0 = \{C_0 = V_r\}$, et l'ensemble des *rounds* contenant tous les singletons : $\mathcal{R}_0 = \{\{e\}, \forall e \in E\}$. L'existence d'une solution réalisable avec \mathcal{C}_0 et \mathcal{R}_0 est assurée car tous les liens (r, g) entre chaque routeur $r \in V_r$ et une passerelle $g \in V_g$ se trouvant sur le bord de la coupe C_0 peut être activé $d(C)$ fois.

Le programme CCP calcule une couverture optimale des coupes par les *rounds* pour un ensemble courant de variables et de contraintes. Puis, le processus de

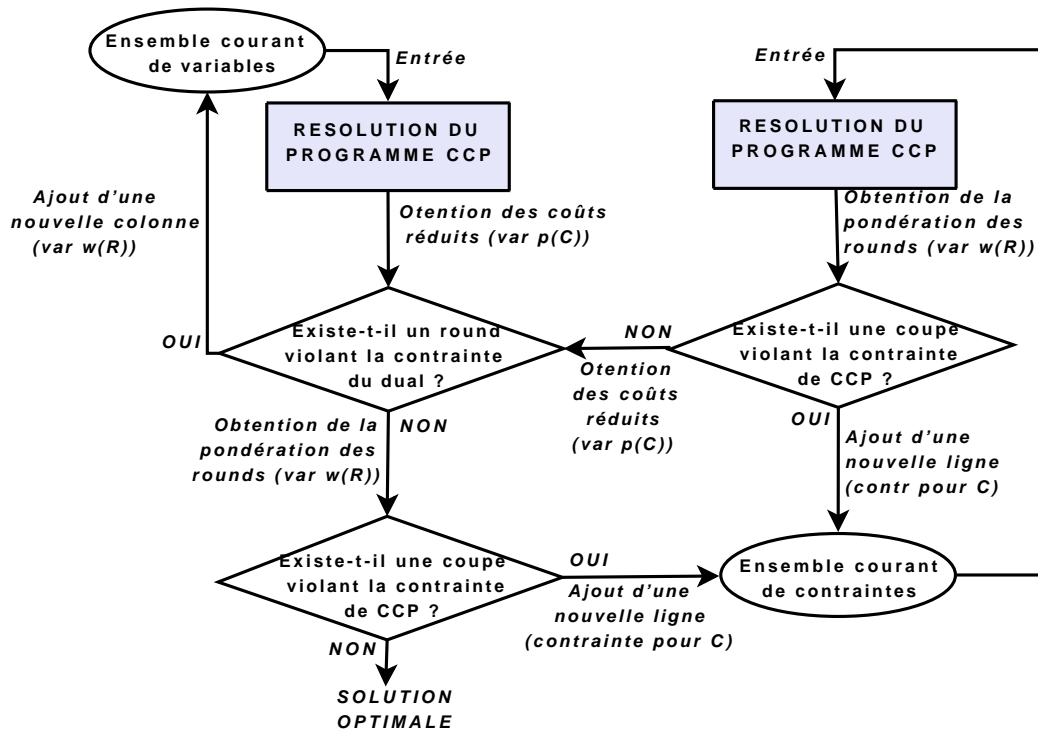


FIGURE 4.3 – Processus de génération croisée de lignes et de colonnes appliqué au problème de couverture des coupes par des *rounds* (CCP).

génération de colonnes calcule les *rounds* qui violent la contrainte 4.12 du programme dual et ainsi enrichir les variables du programme CCP. Tant qu'il existe un tel *round*, il est ajouté à l'ensemble des variables et l'algorithme résout à nouveau le programme CCP. Une vérification est ensuite faite pour déterminer si toutes les coupes de G isolant les points d'accès sont couvertes par les *rounds*. Dans le cas contraire, le processus de génération de lignes est à son tour lancé. Celui-ci calcule les coupes non couvertes et ajoute la ligne correspondante, i.e. la contrainte, dans le programme CCP.

Cette technique est répétée jusqu'à ce que plus aucun *round* ni coupe ne soit généré par les programmes auxiliaires. Le théorème de séparation nous assure alors l'optimalité de la solution trouvée.

Nous avons implémenté cet algorithme et validé son équivalence à la formulation chemin/*round* sur un grand nombre de réseaux de test : des topologies régulières ou aléatoires. Ces résultats et analyses sont développés dans la section suivante.

Algorithme 2 Algorithme primal-dual pour CCP.

```

 $\mathcal{C} \leftarrow \{C_0 = V_r\}$ 
 $\mathcal{R} \leftarrow \{\{e\}, \forall e \in E\}$ 
Résoudre CCP
 $\mathcal{R}_{new} \leftarrow \text{rounds qui violent 4.12} : \{R, \text{ t.q. } 1 < \sum_{C \in \mathcal{C}} \delta(R, C) \rho_C\}$ 
 $\mathcal{C}_{new} \leftarrow \text{coupes qui violent 4.6} : \{C, \text{ t.q. } d(C) > \sum_{R \in \mathcal{R}} \delta(R, C) w(R)\}$ 
tant que  $(\mathcal{R}_{new} \neq \emptyset) \parallel (\mathcal{C}_{new} \neq \emptyset)$  faire
  tant que  $(\mathcal{R}_{new} \neq \emptyset)$  faire
     $\mathcal{R} \leftarrow \mathcal{R} \cup \{\mathcal{R}_{new}\}$ 
    Résoudre CCP
     $\mathcal{R}_{new} \leftarrow \text{calculer rounds violant 4.12}$ 
   $\mathcal{C}_{new} \leftarrow \text{calculer coupes violant 4.6}$ 
  tant que  $(\mathcal{C}_{new} \neq \emptyset)$  faire
     $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{\mathcal{C}_{new}\}$ 
    Résoudre CCP
     $\mathcal{C}_{new} \leftarrow \text{calculer coupes violant 4.6}$ 
     $\mathcal{R}_{new} \leftarrow \text{calculer rounds violant 4.12}$ 
retour  $w$ .

```

4.4 Performances

Nous avons validé notre méthode à travers de nombreuses simulations sur des topologies en grille (de type Manhattan) et des réseaux aléatoires dans le plan Euclidien, comme expliqué au début de la Section 3.4. Les points d'accès ont été répartis régulièrement sur la grille (au centre ou dans les coins), ou choisis aléatoirement parmi les nœuds déployés dans les topologies aléatoires. Le trafic en chaque routeur est soit unitaire (i.e. tous les routeurs ont une demande de 1), ou aléatoire entre 1 et 20 répartie uniformément pour chaque routeur.

Nous utilisons le modèle d'interférence binaire à distance 2 (Section 2.1.3.2). Un *round* est donc un sous-ensemble de liens du graphe des transmissions G tel que toute paire de liens du *round* est à distance au moins égale à 3 dans G .

Nous avons tout d'abord cherché à valider notre nouvelle approche par rapport à celles qui existent dans la littérature, et en particulier la comparer avec la formulation utilisant les flots. Les résultats de CCP confirment bien le comportement de la capacité du réseau radio maillé, à savoir qu'elle décroît lorsque la taille du réseau augmente, et croît linéairement avec le nombre de points d'accès déployés comme nous l'avons déjà remarqué dans la Section 3.4, à la condition que ceux-ci

soient placés assez loin les uns des autres.

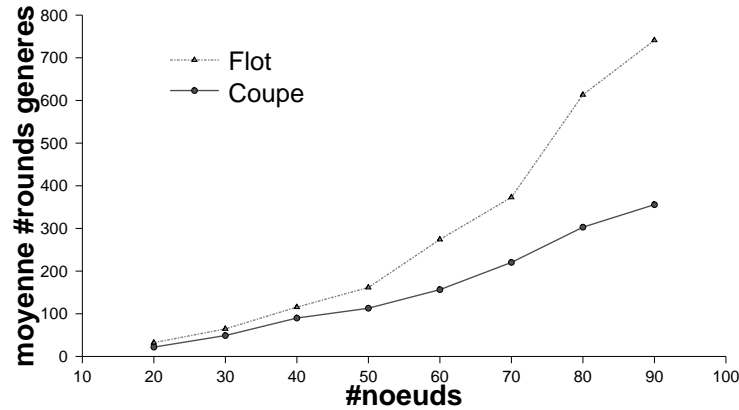


FIGURE 4.4 – Nombre moyen de *rounds* générés durant la résolution des formulations chemin/*round* et coupe/*round*.

Un avantage de notre formulation coupe/*round* par rapport à celle avec le flot est que le nombre de *rounds* générés par les programmes auxiliaires durant la génération de colonnes est diminué (Figure 4.4). La complexité de la génération de colonnes est déterminée par celle de ses programmes auxiliaires. Or, le programme auxiliaire associé aux *rounds* est un problème *NP*-difficile puisqu'il est relié à celui de stable maximum dans le graphe des conflits [CCPS97]. Faire appel à ce programme un nombre minimum de fois permet d'accélérer le temps de résolution de la génération de colonnes.

Néanmoins, comme nous l'avons remarqué précédemment (Section 3.4), le temps de résolution consacré à la génération de nouveaux *rounds* sur les topologies testées n'est pas prépondérant. Résoudre le programme linéaire en nombre entiers pour la génération des *rounds* est très rapide, presque instantané. Nous pensons que cela est dû à la particularité des variables duales, qui sont non nulles pour un faible nombre de liens dans le réseau. La complexité n'est donc pas un problème dans le cas spécifique d'une fonction de poids sur les liens induite par le problème dual à la concentration de flot sur les points d'accès. En particulier, la section suivante étudie les variables duales dans une zone proche des points d'accès, afin de mettre en évidence la zone dans laquelle il est suffisant d'optimiser pour obtenir la capacité optimale du réseau radio maillé.

4.4.1 Mise en évidence de la zone de contention

Dans les topologies en grille, des résultats précédents ont montré des bornes exactes pour le problème de pondération des *rounds* (RWP) dans le cas où une passerelle est située soit au centre, soit dans un coin de la grille [GPRR08]. Dans leur preuve, les auteurs utilisent les valeurs des variables primales et duales pour montrer que seul le 2-voisinage du point d'accès a une influence sur la valeur de la solution optimale.

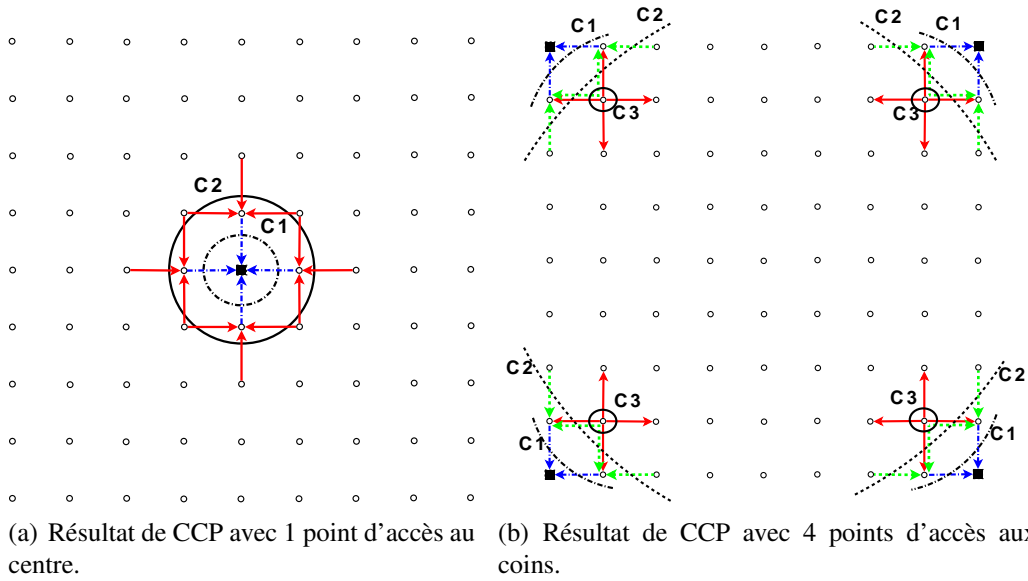


FIGURE 4.5 – Un faible nombre de coupes semblent suffisantes pour trouver la solution optimale de CCP.

Dans notre étude, nous disons qu'une coupe est active dans la solution optimale si son coût réduit associé est strictement positif. D'après la théorie de la dualité, si le coût réduit est strictement positif, alors la contrainte correspondant dans le programme primal est *serrée*, c'est-à-dire que l'inégalité \leq est en fait une égalité [Chv83]. Un premier résultat sur les topologies en grille de notre méthode montre que les coupes actives dans la solution optimale du problème CCP sont situées dans le 2-voisinage des points d'accès. La Figure 4.5 permet de visualiser clairement les coupes qui restreignent la capacité du réseau. Lorsque le point d'accès se situe au centre de la grille (Figure 4.5(a)), seules deux coupes sont actives dans la solutions optimales : $C_1 = V_r$ et $C_2 = V_r \setminus \Gamma(g)$ où g est le point d'accès. La quantité de trafic qui doit traverser leur bord et alors égale à la somme des capacités des liens constituant ce bord, serrant ainsi les contraintes du pro-

gramme coupe/round associées à C_1 et C_2 . Nous pouvons ainsi voir que la capacité de transport est limitée sur les liens situés dans le 2-voisinage du point d'accès. Il en est de même pour le cas où quatre points d'accès sont placés aux coins de la grille. C_1 et C_2 sont les mêmes coupes que dans le cas (a), et la troisième coupe active C_3 est constituée des 4 nœuds situés à distance 2 des points d'accès qui ne sont pas sur le bord de la grille. Cette troisième coupe permet d'allouer plus de capacité sur les arcs incidents à ces 4 sommets nécessaire pour acheminer le trafic jusqu'aux points d'accès. Plus généralement, nous remarquons que le nombre de coupes actives dans la solution optimale reste faible, quelque soit la topologie et le nombre de nœuds dans le réseau. Ces résultats nous permettent de conjecturer le résultat suivant :

Conjecture 4.1 *La formulation en coupe/round de CCP se résout avec un nombre de coupes actives polynomial en la taille du réseau.*

Le nombre de coupes semble néanmoins dépendre de la taille de la zone de contention autour des points d'accès, qui elle-même dépend du modèle d'interférence choisi. Plus précisément, il semble que toutes les coupes ne possédant aucun lien situé dans la zone de contention d'un point d'accès possède un coût réduit nul dans la solution optimale de CCP. La zone de contention peut être vue comme l'union des bords de coupes actives, dont la somme des capacités des liens de chaque bord est égale au trafic de la coupe associée.

En regardant ces coupes actives, nous identifions la zone de contention dans le réseau, mettant en évidence des résultats similaires à [GPRR08] sur des topologies plus générales et avec plusieurs points d'accès.

4.4.2 Accélération de la résolution

A partir des résultats observés dans la section précédente, nous avons cherché à améliorer le temps de résolution pour, en particulier, vérifier qu'optimiser dans cette zone de contention est suffisant pour obtenir la solution optimale de CCP. Pour cela, nous procédons de la manière suivante : étant donné un entier $k \in \mathbb{N}$ en entrée de notre problème, nous appliquons l'Algorithme 2 en restreignant la génération de colonnes et de lignes au k -voisinage des points d'accès. En d'autres termes, nous forçons les programmes auxiliaires à ne considérer comme graphe que l'union des k -voisinage des points d'accès. Un round généré aura tous ses liens situés à une distance au plus k des points d'accès, et une coupe aura tous les liens de son bord dans le k -voisinage des points d'accès.

En fonction de l'entier k , la valeur de la solution optimale de CCP sera inférieure ou égale à celle sur le graphe entier : $OPT_1 \leq OPT_2 \leq \dots \leq OPT_{k-1} \leq OPT_k \leq \dots \leq OPT$. En effet, l'ensemble des coupes considérées sera un sous-ensemble de celui sur le graphe entier. Donc soit nous avons assez de contraintes et nous trouvons le même résultat que pour le problème original, soit le problème est sous-contraint, entraînant une diminution de la valeur optimale du problème de minimisation.

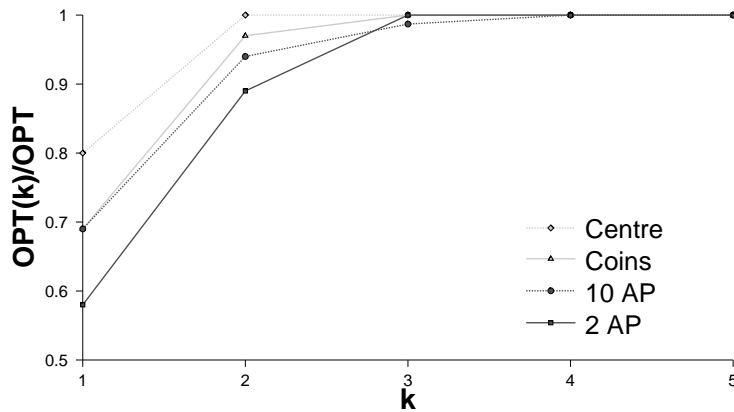


FIGURE 4.6 – Ecart à l'optimal du problème CCP restreint au k -voisinage des points d'accès.

Nous résolvons donc optimalement le problème CCP avec $k = 1, \dots, 5$ sur plus d'une centaine de topologies (aléatoires et en grille). Quelques résultats représentatifs de l'ensemble de nos tests sont décrits sur la Figure 4.6 sur laquelle nous voyons l'écart à l'optimal de la solution suivant les valeurs de k . Plus généralement, la Figure 4.7 montre le pourcentage de réseaux qui ont atteint la valeur de la solution optimale pour une certaine valeur de k . Nous remarquons que la grande majorité des solutions optimales sont trouvées pour $k = 2$ ou 3, et que 100% des topologies testées atteignent la solution optimale si les *rounds* et coupes générés se situent dans le 4-voisinage des points d'accès.

En particulier, les réseaux pour lesquels $OPT_1 = OPT$ sont ceux qui possèdent beaucoup de points d'accès en comparaison de la taille du réseau, et donc où l'union des voisins des points d'accès contient pratiquement tous les nœuds du réseau. Au contraire, le cas où $OPT_3 < OPT$ correspond généralement à des réseaux de plus de 70 nœuds dont la connectivité est assez faible autour des points d'accès, et où les goulots d'étranglement peuvent apparaître loin de

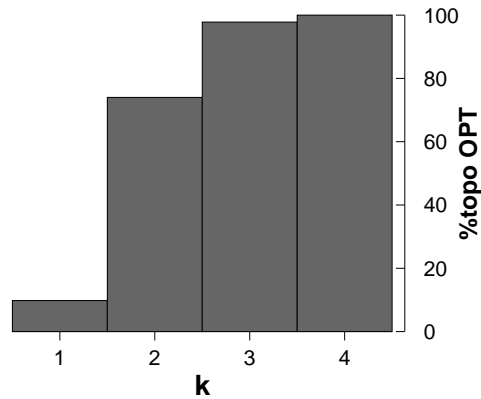


FIGURE 4.7 – Pourcentage du nombre de réseaux atteignant l'optimal suivant les valeurs de k .

ceux-ci. Néanmoins, l'écart à l'optimal lorsque $k = 3$ est très faible comme nous pouvons le voir sur la Figure 4.8 pour un réseau de 90 nœuds.

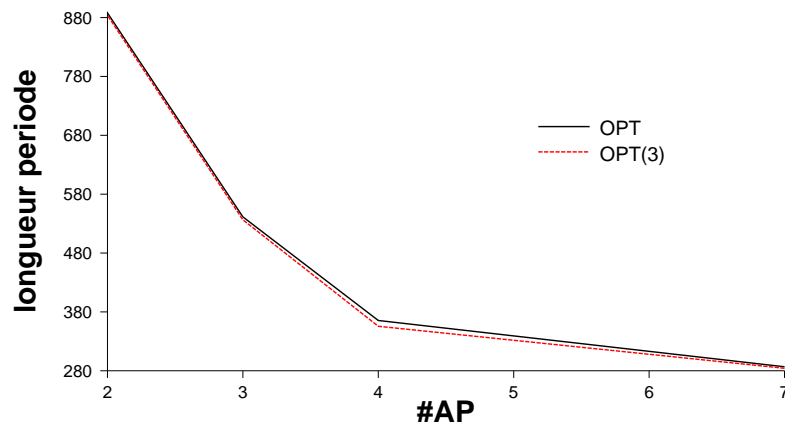


FIGURE 4.8 – Ecart à l'optimal avec $k = 3$ pour un graphe aléatoire de 90 nœuds.

Cette approche est donc très utile en pratique. Cela permet de déployer un réseau qui sera optimisé autour des points d'accès. Dans chacune des zones de contention, un ordonnancement précis des transmissions peut être conduit optimalement par le point d'accès pour son voisinage. Des algorithmes d'approximation, par exemple pour le routage distribué, peuvent alors être appliqués à l'extérieur des zones de manière à concentrer le trafic équitablement entre les points d'accès,

ou plus précisément à l'entrée de chacune des zones de contention, sans dégrader la capacité du réseau radio maillé.

Influence des acquittements sur la capacité

Nous avons étudié précédemment les propriétés topologiques intéressantes pour l'optimisation de la capacité des réseaux radio maillés. En particulier, nous avons mis en évidence des contraintes locales sur le positionnement des points d'accès. Un autre axe de recherche concernant l'optimisation de cette capacité consiste à mettre en évidence des contraintes liées à la technologie sans fil utilisée. Comme nous l'avons vu dans la Section 1.1.2, le principal problème dans l'étude des performances des réseaux radio est la chute de la capacité [GK00, JS03] due aux interférences radio entre les transmissions simultanées proches [KN05, JPPQ03]. Limiter au mieux ces interférences est donc nécessaire, soit au niveau des équipements du réseau (utiliser des antennes directionnelles, des codes ou des fréquences orthogonaux), soit au niveau du protocole comme dans 802.11 où les nœuds écoutent le canal radio avant de pouvoir transmettre ou 802.16 en mode maillé dans lequel une station de base orchestre l'accès au canal.

Afin de garantir la bonne transmission des données en chaque saut dans le réseau, les normes radio ont introduit l'envoi d'accusés de réception, ou acquittements, de la part du nœud récepteur à l'émetteur afin de valider la bonne réception des données. Ce processus a été intégré aux standards pour les réseaux sans fil. Comme nous l'avons vu dans le chapitre d'introduction, une technologie très répandue pour les réseaux radio maillés est la norme WiFi IEEE 802.11 [80207]. Dans ce standard, l'accès partagé au médium radio se fait de manière aléatoire par le protocole CSMA/CA, en suivant généralement un schéma d'échange de messages courts appelés RTS-CTS, suivis de la transmission des données, et enfin d'un accusé de réception venant clore l'échange. Ces échanges permettent d'assurer la bonne transmission des données au niveau de la couche MAC du modèle OSI, en forçant les nœuds potentiellement en contention à se taire. Le deuxième standard développé pour les réseaux radio et également utilisé pour les réseaux radio maillés est le standard WiMax qui procure des débits de plusieurs dizaines de mégabits par seconde sur une zone de couverture portant sur quelques di-

zaines de kilomètres [80209]. Ce standard donne des spécifications relatives à l'implémentation des couches physique et liaison de données (MAC) pour les réseaux métropolitains sans fil. Le cœur de la technologie WiMax est la station de base, c'est-à-dire l'antenne centrale chargée de communiquer avec les antennes d'abonnés. Elle orchestre l'accès au canal radio et ordonnance les communications [DV08]. Ainsi dans ce standard, plusieurs stations peuvent communiquer à la station de base suivant une phase prédéfinie de communication, et attendre la fin de la phase avant de recevoir leur accusé de réception. L'avantage est de limiter les temps d'échange entre des transmissions longues afin de ne pas pénaliser les transmissions courtes. Dans ce cas, les accusés de réception peuvent être groupés et renvoyés en une fois par la station de base à la fin de la phase de communication. Cet envoi est alors géré par la couche transport qui doit router les acquittements vers chaque nœud concerné.

L'étude de la capacité des réseaux radio maillés et le développement des modèles linéaires permettant de maximiser cette capacité décrits dans les chapitres précédents, ont permis une étude quantitative et comparative entre deux modèles de gestion des acquittements. L'objectif ici est de mettre en évidence les effets des accusés de réception sur la capacité théorique du réseau. Le gain en capacité induit par le report des acquittements de la couche MAC à la couche transport est quantifié pour des réseaux en grille et aléatoires. La répartition de la charge dans le réseau est également étudiée afin de garantir une qualité de service en terme de délai.

5.1 Hypothèses de fonctionnement du réseau

Notre étude concerne deux variantes protocolaires des réseaux radio maillés qui s'appuient sur les mêmes modèles techniques et de trafic mais diffèrent par les interférences entre les communications. Dans la suite, nous présentons les différentes caractéristiques inter-couche du réseau choisies, puis la modélisation des deux modèles d'interférence comparés. La formulation linéaire du problème d'optimisation de la capacité prenant en compte les deux modèles d'interférence est ensuite présentée.

Nous considérons l'infrastructure fixe des réseaux radio maillés formée de routeurs sans fil interconnectés par des liens radio et reliés à Internet (ou tout autre service ou réseau supérieur pouvant être filaire ou non) au travers de points d'accès. Chaque routeur possède une demande qui correspond au trafic agrégé

des clients mobiles sur la zone couverte par le réseau radio maillé et qui lui sont raccordés. Cette quantité de trafic en chaque routeur doit être routée vers Internet, i.e. jusqu'aux points d'accès, à travers des chemins multi-sauts.

Nous supposons que les nœuds du réseau sont équipés chacun d'une antenne omnidirectionnelle et possèdent tous la même puissance de transmission. Ces hypothèses permettent alors de modéliser le réseau radio maillé par un graphe orienté $G = (V, E)$ dont les nœuds correspondent à l'ensemble des routeurs et des points d'accès, et les arcs représentent les transmissions radio possibles entre les nœuds (Section 2.1). En fonction de la puissance de transmission des nœuds, un rayon de transmission est alors défini, et chaque nœud est relié à l'ensemble des sommets situés dans sa zone de transmission.

Dans les deux variantes de modèle que nous comparons, les acquittements sont considérés comme du trafic circulant en sens inverse par rapport à l'envoi des données. Nous représentons le volume des accusés de réception par un pourcentage α du trafic acquitté. Le temps de communication réservé dans le réseau pour ces acquittements peut être géré soit au niveau de la couche MAC (modèle 1), soit au niveau de la couche transport (modèle 2). Notons que cette modélisation induit un routage symétrique pour des acquittements au niveau transport dans le deuxième modèle.

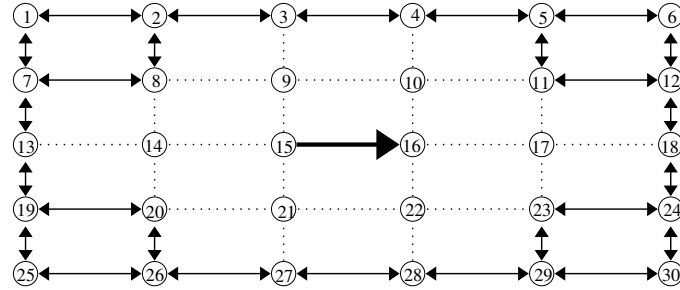
5.2 Modélisation de la gestion des acquittements

Nous utilisons des modèles d'interférence binaires définis dans la Section 2.1.3, qui spécifient si deux liens peuvent toujours, ou jamais, accéder au canal simultanément. Nous modélisons maintenant le comportement du réseau en fonction des deux technologies étudiées : gestion des acquittements au niveau de la couche MAC, ou report de la gestion au niveau de la couche transport. La différence entre les deux modèles réside dans la nature des échanges entre les nœuds à un moment donné de la période de temps. Cela entraîne la considération de deux modèles d'interférence particuliers, présentés dans les sections suivantes.

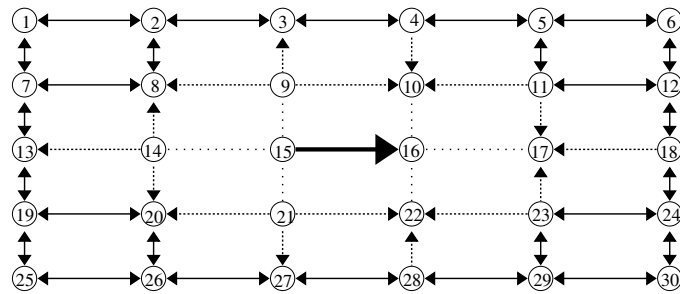
5.2.1 Modèle symétrique - Couche MAC

Dans le premier cas, les acquittements sont inclus dans la communication et sont effectués au niveau MAC comme dans la norme IEEE 802.11 [80207]. Un nœud émetteur doit être en mesure de recevoir les acquittements associés sans être brouillé par une autre communication. De manière similaire, le nœud récepteur

doit pouvoir acquitter du trafic reçu sans perturber d'autres réceptions. Ainsi, à un instant donné, un nœud en communication est à la fois émetteur et récepteur. Ceci se traduit par des interférences binaires symétriques à deux sauts comme illustré dans la grille par la figure 5.1(a).



(a) Interférences symétriques à deux sauts dans la grille.



(b) Interférences asymétriques à un saut dans la grille.

FIGURE 5.1 – Modèles d'interférence binaires, les flèches représentent les communications n'interférant pas avec la communication $15 \rightarrow 16$.

5.2.2 Modèle asymétrique - Couche transport

Lorsque la gestion des acquittements est supprimée du niveau MAC, un nœud émetteur n'a pas besoin d'être également récepteur : il n'attend pas d'acquittement à ce niveau. De même, un récepteur est simplement récepteur. Comme nous pouvons le voir sur la Figure 5.1(b), deux nœuds voisins peuvent maintenant envoyer simultanément du trafic vers deux récepteurs distincts et non voisins. Les accusés de réception doivent maintenant être routés par la couche transport comme le flot de données. Ce modèle est appelé modèle d'interférence asymétrique par opposition à celui présenté dans la section précédente.

5.3 Formulation linéaire et génération de colonnes

Nous utilisons la même mesure de capacité que dans les chapitres précédents : pour un ensemble de requêtes donné, nous cherchons la durée minimum d'une période permettant d'écouler toutes les requêtes de trafic des routeurs vers les passerelles sur des chemins multi-sauts.

Etant donné le graphe $G = (V, E)$ modélisant un réseau radio maillé, un sous-ensemble $V_g \subset V$ de points d'accès, et un ensemble de requêtes de trafic K de taille $d(k)$ d'un sommet v_k de $V_r = V \setminus V_g$ vers les points d'accès, le problème consiste à déterminer un routage des requêtes tel que chaque chemin soit constitué d'arcs pouvant être activés au cours d'une période de temps d'amplitude minimum. Nous rappelons ici la formulation linéaire du problème RWP dont un ensemble de contraintes est modifié afin d'intégrer la prise en compte des acquittements.

$$\min \sum_{R \in \mathcal{R}} w(R) \quad (5.1)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_k} f(P) = d(k), \quad \forall k \in K \quad (5.2)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}, P \ni e} f(P) + \alpha \sum_{P \in \mathcal{P}, P \ni x_e} f(P) \leq \sum_{R \in \mathcal{R}, R \ni e} w(R), \quad \forall e \in E \quad (5.3)$$

L'ensemble de contraintes 5.2 constitue les contraintes de satisfaction de la demande : chaque routeur $v_k \in V_r$ injecte son trafic $d(k)$ dans le réseau à travers des chemins contenus dans l'ensemble \mathcal{P}_k menant aux points d'accès. Les contraintes 5.3 peuvent être assimilées à des contraintes de capacité qui lient l'activation des liens au cours de la période à la capacité maximale de flot qu'ils peuvent transporter : la quantité de flot transportée par un lien est limitée par son activation au cours de la période. Si maintenant une quantité non nulle de flot circule sur un lien $e \in E$, alors il faut prévoir l'envoi de l'accusé de réception sur l'arc x_e qui dépend du modèle considéré. Dans le modèle symétrique modélisant la prise en compte des acquittements au niveau de la couche MAC, x_e est l'arc e lui-même puisque l'envoi des acquittements est prévu dans l'échange des messages constituant une occupation du canal. Dans le modèle asymétrique modélisant le report des acquittements sur la couche transport, x_e correspond à l'arc opposé $\bar{e} = (v, u)$ de $e = (u, v)$ puisque l'accusé de réception doit être routé

dans le sens inverse à l'envoi des données. Rappelons que α représente le volume des accusés de réception défini comme étant un pourcentage du volume de trafic des données.

Nous résolvons le modèle présenté ci-dessus à l'aide de la technique de génération de colonnes présentée dans la Section 3.3. Dans la suite, nous détaillons le programme dual de notre formulation et les variations dans la résolution dues à la prise en compte des accusés de réception.

Nous choisissons comme ensembles restreints initiaux de variables les ensembles $\mathcal{R}_0 = \{\{e\}, \forall e \in E\}$ et $\mathcal{P}_0 = \{\cup_{k \in K} \mathcal{P}_{k,0}\}$ où $\mathcal{P}_{k,0}$ contient un plus court chemin entre le routeur $v_k \in V_r$ et un point d'accès dans V_g autorisant une solution réalisable du problème. Les programmes auxiliaires (Section 3.3) génèrent ensuite des nouveaux chemins et *rounds* qui violent les contraintes du programme linéaire dual associé, étant donné un ensemble de coûts réduits :

$$\alpha \sum_{e \in P} \beta_e \geq \gamma_k, \quad \forall P \in \mathcal{P}_k \quad (5.4)$$

$$1 \geq \sum_{e \in R} \beta_e, \quad \forall R \in \mathcal{R} \quad (5.5)$$

où β_e et γ_k sont respectivement les variables duales associées aux contraintes 5.3 et 5.2.

5.4 Etude quantitative

Les tests ont été réalisés à la fois sur des topologies régulières comme la grille, mais également sur des topologies aléatoires où les nœuds ont été déployés dans le plan suivant une loi de Poisson (Section 3.4). Puis, une puissance de transmission fixe et commune à tous les nœuds permet de construire la zone de transmission de chaque nœud à l'aide d'une fonction d'atténuation en fonction de la distance entre les deux nœuds. Nous déduisons alors l'ensemble des liens du réseau de la manière suivante : si un nœud v se situe dans la zone de transmission d'un nœud u , alors un lien (u, v) est créé et ajouté à l'ensemble des arcs du graphe. Notons que comme nous fixons une puissance commune à tous les nœuds, le graphe obtenu sera orienté symétrique. Pour la grille, les nœuds sont placés à égale distance dans le plan de manière à former un quadrillage régulier dans lequel les liens existent

Topologie	Modèle symétrique (ACK couche MAC)		Modèle asymétrique (ACK couche transport)	
	moyenne du #liens/round	#chemins	moyenne du #liens/round	#chemins
grille 3x3 - centre	1.33	8	2.03	8
grille 3x3 - coins	1.57	6	3	9
grille 7x7 - coins	9.3	61	13.96	73
grille 10x10 - 10 pt accès	19.04	158	27.78	173
10 nœuds- 1 passerelle	1	9	1.43	12
50 nœuds- 1 passerelle	4.69	55	6.74	61
100 nœuds- 2 passerelles	7.76	106	11.5	116

TABLE 5.1 – La taille moyenne des *rounds* et le nombre de chemins dans la solution optimale augmentent si les acquittements sont reportés de la couche MAC à la couche transport.

entre deux nœuds verticalement et horizontalement consécutifs.

Le pourcentage α de capacité réservé pour les acquittements varie de 1 à 10%. Les demandes de trafic générées en chaque routeur du réseau sont soit toutes identiques et égales à 1 unité, soit choisies aléatoirement entre 1 et 20. Plusieurs placements de points d'accès ont également été effectués sur chaque topologie. Nous avons étudiées des placements de points d'accès réguliers dans la grille, à savoir un point d'accès au centre ou quatre points d'accès dans les coins, mais également des placements aléatoires dans les topologies générales.

Dans la suite de la section, nous quantifions le gain en capacité induit par le report des acquittements sur la couche transport, en d'autres termes nous comparons les solutions optimales de notre modèle avec les deux modèles d'interférence suivant la couche qui gère les accusés de réception. Nous étudions ensuite la charge des nœuds du réseau, c'est-à-dire la quantité de flot qu'un nœud doit retransmettre. Ces paramètres permettent de discuter de la meilleure technologie utilisée pour les réseaux radio maillés de manière à maximiser la capacité et offrir la meilleure qualité de service aux clients.

5.4.1 Gain en capacité

Nous avons quantifié le gain en capacité induit par le déplacement de la gestion des accusés de réception, depuis la couche MAC vers la couche transport.

Comme il semble intuitif d'après les Figures 5.1 représentant les deux modèles d'interférence sur la grille, le modèle asymétrique (modèle d'acquittements au ni-

veau de la couche transport) permet en général de construire des *rounds* contenant plus d'arcs que le modèle symétrique (modèle d'acquittements au niveau de la couche MAC). Ce phénomène est confirmé dans nos tests dont les résultats sont reportés sur le Tableau 5.1 pour un certain nombre de topologies représentatives, pour lesquelles nous pouvons voir que le nombre de liens pouvant transmettre simultanément dans le modèle asymétrique est en moyenne une fois et demi plus grand que celui dans le modèle symétrique. En effet, dans le modèle symétrique, un lien qui transmet à un temps t va bloquer la transmission de tous les liens situés dans son 2-voisinage, contrairement au modèle asymétrique qui autorise l'activation de certains liens situés à distance 2.

Cette remarque entraîne une augmentation de la capacité du réseau lorsque les acquittements doivent être routés par la couche transport. Comme le montre la Figure 5.2, le gain en capacité dans les topologies en grille est toujours supérieur à 20% et peut être proche de 50% selon la taille du réseau et le placement des points d'accès. Notons que lorsque la grille possède un unique point d'accès situé au centre de celle-ci, alors le rapport des capacités obtenues par les deux modèles est constant quelque soit le volume des acquittements, i.e. pour tout $0 \leq \alpha \leq 10\%$ du trafic. De même, il varie peu lorsque 4 points d'accès sont placés dans les coins. Ce phénomène est dû au goulot d'étranglement présent autour de chaque point d'accès qui restreint la solution optimale de notre problème, comme cela a été profondément étudié dans le Chapitre 4. Le placement régulier des points d'accès dans ce type de réseau permet en outre de répartir équitablement le trafic entre les points d'accès assez éloignés les uns des autres, et également d'équilibrer le flot qui atteint chacune des zones critiques comme nous le verrons plus en détail dans la section suivante. La régularité de la topologie et les propriétés spécifiques de connexité de la grille permettent d'intégrer facilement l'activation des liens opposés à la transmission du trafic, afin d'envoyer les acquittements sans devoir augmenter la durée de la période de temps et ainsi diminuer la capacité du réseau.

Dans les topologies aléatoires, ces phénomènes dûs à la régularité disparaissent. Le modèle asymétrique permet toujours d'augmenter la capacité du réseau même si les acquittements doivent être routés sur les arcs opposés, mais le gain en capacité reste inférieur à celui pour les topologies en grille. Comme nous pouvons le voir sur la Figure 5.3, le gain se situe entre 0 et 20%, et il augmente avec la valeur de α , i.e. avec le volume du trafic d'acquittements. Ceci s'explique par le fait que la topologie et le placement de points d'accès sont complètement aléatoires. Un volume plus important d'accusés de réception à envoyer entraîne un besoin d'activer plus longtemps les liens devant transporter à la fois les données

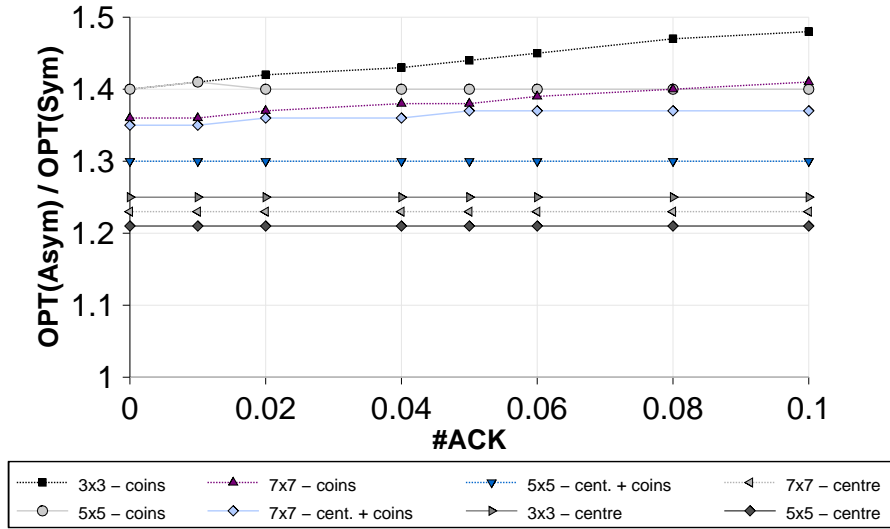


FIGURE 5.2 – Gain en capacité obtenu en reportant les acquittements au niveau transport sur des topologies en grille.

et les accusés de réception (dans le cas où ces derniers sont gérés par la couche MAC), diminuant ainsi la capacité du réseau. Dans le modèle asymétrique où ce sont les liens opposés qui sont chargés de transporter les accusés de réception, leur activation peut être combinée à un *round* déjà existant qui contient des liens deux à deux sans interférence avec le lien concerné. Le gain en capacité de report des acquittements devient alors plus important.

5.4.2 Répartition de la charge dans le réseau

Nous étudions également la répartition de la charge dans le réseau. Plus précisément, nous avons calculé la charge en chaque routeur du réseau radio maillé, c'est-à-dire le flot en transit en chacun d'eux. Nous ne prenons en compte que la quantité de trafic envoyée par les autres nœuds du réseau et que le routeur en question doit retransmettre.

Nous constatons au travers des tests que le modèle asymétrique opère une meilleure répartition de la charge dans le réseau. La charge moyenne du réseau, c'est-à-dire la moyenne des charges sur tous les routeurs, est très proche dans les deux modèles. Mais nous avons remarqué que la variation de la charge des nœuds dans un même réseau est plus importante avec le modèle symétrique où les acquittements sont gérés au niveau de la couche MAC. Un nombre plus impor-

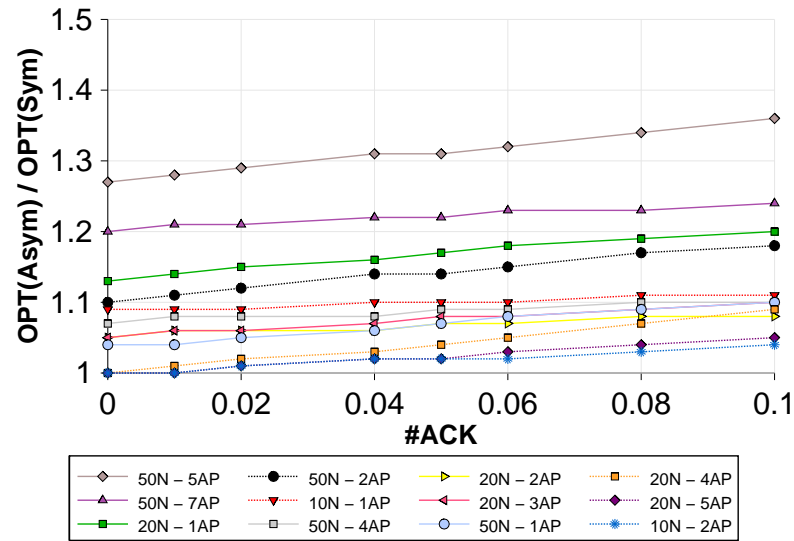
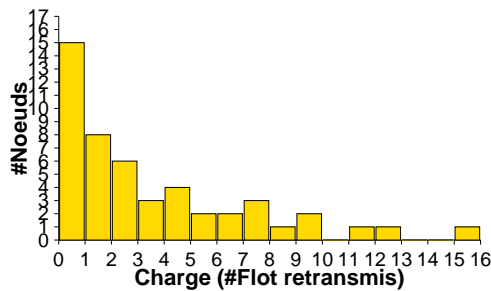
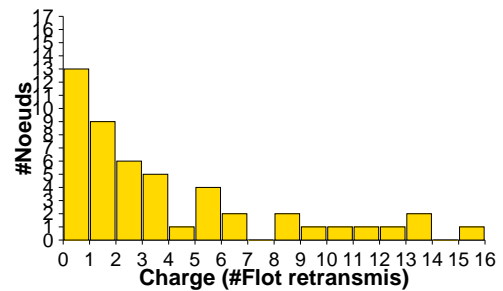


FIGURE 5.3 – Gain en capacité obtenu en reportant les acquittements au niveau transport sur des topologies aléatoires.

tant de nœuds possèdent une forte charge dans le modèle symétrique. Cela s'est révélé vrai sur nos tests, et nous en présentons ici un exemple représentatif dans un réseau aléatoire de 50 nœuds. Nous voyons sur la Figure 5.4(a) pour le modèle asymétrique que seuls 3 nœuds possèdent une charge importante de trafic reçue des autres nœuds et qu'ils doivent retransmettre (plus de 10 unités de flot), alors qu'il y en a 6 dans le modèle symétrique (Figure 5.4(b)).



(a) Modèle asymétrique (transport)
(charge moyenne = 3.43).



(b) Modèle symétrique (MAC)
(charge moyenne = 3.49).

FIGURE 5.4 – Comparaison de la distribution de la charge dans un réseau radio maillé de 50 nœuds.

Une meilleure répartition de la charge dans le réseau peut également être quantifiée par le nombre de *feuilles* présentes dans le réseau. Un nœud feuille est défini comme étant un routeur n'ayant que son propre trafic à envoyer. Par définition, une feuille est un nœud ayant une charge égale à 0. Sur la Figure 5.5, nous pouvons alors remarquer que la courbe représentant le pourcentage de feuilles dans le réseau où les acquittements sont gérés par la couche transport est toujours située sous la courbe associée au modèle où les acquittements sont gérés par la couche MAC. Le nombre de feuilles dans le réseau est moins important avec le modèle asymétrique, et ce quelle que soit la topologie et le volume des accusés de réception.

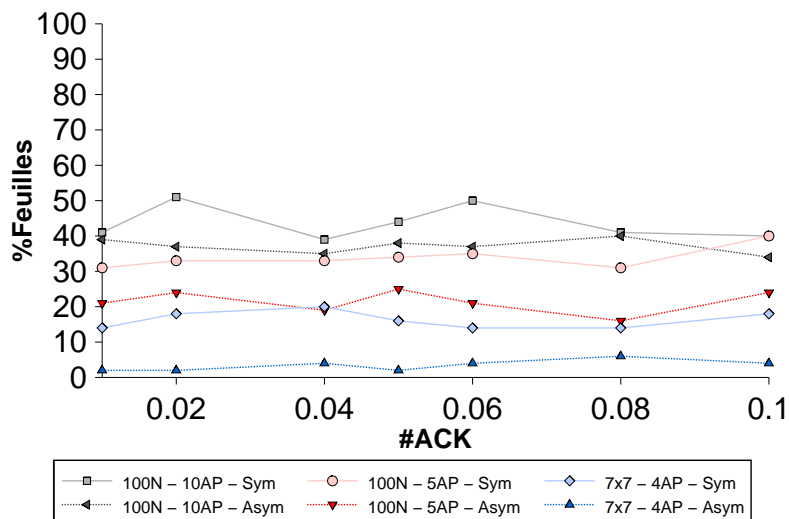


FIGURE 5.5 – Pourcentage de routeurs dans le réseau ne recevant aucun trafic des autres nœuds.

Les *rounds* étant moins contraints dans le modèle asymétrique, ils permettent d'utiliser plus de routes simultanément qu'avec le modèle symétrique. Nous pouvons voir dans le Tableau 5.1 que le nombre de chemins utilisés dans la solution optimale est plus important de 10% lorsque les acquittements sont reportés sur la couche transport. Une utilisation d'un nombre plus grand de chemins permet donc de mieux répartir la charge dans le réseau en diminuant le nombre de feuilles, mais également le nombre de nœuds à forte charge.

Nos résultats confirment ainsi que le couple (couche MAC, topologie) possède

une grande influence sur la capacité des réseaux radio maillés. En particulier, supprimer les acquittements au niveau MAC pour les reporter au niveau de la couche transport permet, en réduisant les interférences, d'augmenter la capacité de plus de 20% dans des topologies régulières comme la grille mais également d'équilibrer la charge des nœuds dans le réseau.

Cependant, cette suppression des acquittements pourrait induire des délais d'arrivée très importants en cas d'échec d'une communication, et dégrader la qualité de service offerte [DV09]. En effet, le modèle que nous avons étudié ne s'intéresse pas au délai de transmission des paquets entre les routeurs et les points d'accès, ni au délai de réception des acquittements reportés sur la couche transport. Cela est principalement dû au fait que notre modèle linéaire ne calcule pas exactement un ordonnancement des communications, mais seulement une pondération des *rounds* (puisque nous nous intéressons à la capacité de transport de chaque lien au cours d'une période). Obtenir un ordonnancement minimisant le délai à partir d'une pondération des *rounds* sans changer la longueur de la période de temps est un problème *NP*-difficile [Mor07]. Les effets du report des acquittements sur le délai de transmissions de bout en bout est une perspective de travail intéressante pouvant mêler à la fois la théorie avec des algorithmes d'approximation pour calculer un ordonnancement des communications, mais également la simulation avec des tests réalisés sur des simulateurs réseaux comme ns-2 [NS2] ou WSNNet [WSN].

Une autre considération dans les réseaux liée au délai est d'étudier la taille des files d'attente en chaque nœud. Nous avons vu qu'avec le report des acquittements de la couche MAC vers la couche transport, la charge des nœuds est réduite. Cela signifie que le nombre de paquets à retransmettre est moins important, mais il peut néanmoins être non négligeable et entraîner des temps de latence importants dans le réseau, dégradant au passage la qualité de service [BSS09]. C'est une direction de recherche que nous allons aborder dans le chapitre suivant.

Vers un trafic dynamique

Une direction très intéressante dans le domaine de l'optimisation des réseaux radio maillés consiste à prendre en compte un trafic dynamique dû au fait que les utilisateurs sont mobiles sur la zone couverte par le réseau. Dans cette optique, des modèles stochastiques, discrets, ou des matrices de trafic évoluant au cours du temps, sont à intégrer dans les méthodes d'optimisation utilisées. Néanmoins, la prise en compte de la dynamique du trafic est très difficile à intégrer dans les paradigmes d'optimisation classique.

L'évolution actuelle des réseaux implique un intérêt croissant pour les protocoles distribués utilisant très peu d'information [Pel87]. Plus précisément dans les réseaux auto-organisés, il est très intéressant de fournir des protocoles s'exécutant de manière autonome et indépendante, ou localisée, en chacun des nœuds du réseau, sans avoir une connaissance de la topologie complète. De nombreux algorithmes distribués ont été développés pour différents problèmes d'optimisation des réseaux. Le routage est un des principaux problèmes faisant appel aux protocoles distribués. Mais le développement de tels algorithmes pouvant tirer profit du dynamisme est un vaste champ de recherche qui n'est encore que très partiellement étudié, malgré le potentiel énorme qu'il recèle en termes d'applications.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au comportement du réseau au cours du temps à travers l'étude d'un protocole local de routage dynamique de paquets. Dans un premier temps, nous nous plaçons dans le cas d'un réseau sans interférence dans lequel les nœuds peuvent transmettre et recevoir des paquets durant un même intervalle de temps. Nous développons un algorithme distribué glouton permettant de transmettre une quantité de trafic arrivant à chaque temps t depuis des nœuds sources vers des nœuds destinations, ou puits, dans le réseau. Nous prouvons ensuite que le protocole est *stable*, c'est-à-dire que le nombre de paquets stockés en chaque nœud et à chaque temps (i.e. en transit à tout moment) dans le réseau reste borné, sous réserve que le trafic soit réalisable.

Dans des travaux précédents, Srikant et al. [WS05] ont étudié des algorithmes distribués et localisés de transmission de paquets dans un réseau. Dans leur étude, le routage des paquets n'est pas pris en compte, les auteurs se concentrent sur

l'organisation des transmissions et l'ordonnancement dans le réseau de sorte à écouler des paquets arrivant continûment. Ils se fondent sur les travaux de Tassioulas et Ephremides [TE92] qui ont proposé une famille de protocoles stables. Dans ces deux travaux, les paquets sont injectés par un processus stochastique qui doit respecter une contrainte de faisabilité stricte, à savoir que le nombre de paquets injectés est toujours strictement inférieur à la valeur d'un flot maximum dans le réseau. D'autres études ont considéré des processus où les paquets sont injectés par un adversaire cherchant à faire échouer le protocole [BKR⁺96, Tsa97]. Deux algorithmes distribués dans les réseaux dynamiques où la topologie et le trafic peuvent changer au cours du temps ont également été développés [ABBS01]. Dans ce cas la preuve de stabilité de ces algorithmes est effectuée pour des réseaux possédant une unique destination.

Dans la suite, nous considérons un modèle de réseau dans lequel des sources injectent des paquets, des nœuds les retransmettent selon un calcul de type gradient glouton local, et des puits extraient ces paquets du réseau. Chaque nœud du réseau ne possède comme information que l'état de ses voisins, i.e. le nombre de paquets stockés. D'une certaine manière, ce comportement peut se comparer à des algorithmes distribués de calcul de flot [GT88, PLBD05] développés pour le problème du flot maximum (Section 4.1.1).

Nous montrons que, dans le cas de plusieurs sources et destinations indifférenciées, notre protocole est optimal dans le sens où il est stable tant que les sources injectent un flot qu'une autre méthode saurait écouler. En particulier, notre protocole reste stable même si la condition de faisabilité n'est plus stricte sur des topologies possédant plusieurs sources et destinations, sous réserve d'une conjecture dans un cas particulier où la valeur du flot est contrainte au niveau des destinations du réseau.

6.1 LGG : un algorithme distribué de gradient local

Nous considérons un réseau modélisé par un multigraphe $G = (V, E)$ orienté symétrique¹. Δ représente le degré maximum du graphe : $\Delta = \max_{v \in V} |\Gamma(v)|$, où $\Gamma(v)$ représente l'ensemble des voisins du nœud v dans G .

Un nœud possède une file d'attente dans laquelle il stocke les paquets qu'il reçoit de ses voisins avant de les retransmettre. L'état de la file d'attente du nœud

1. Les résultats de ce chapitre sont également valables dans un graphe orienté général en modifiant quelque peu les preuves.

u à l'instant t est noté $q_t(u)$ et est également appelée *hauteur de u au temps t* . $\mathcal{S} \subseteq V$ et $\mathcal{D} \subseteq V$ représentent respectivement l'ensemble des sources et des destinations dans le réseau (Figure 6.1).

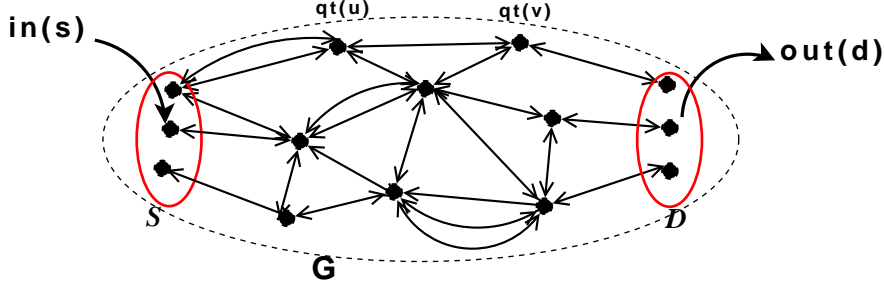


FIGURE 6.1 – Le multigraphe G modélisant le réseau.

Le réseau est synchrone et à chaque étape :

- Chacune des sources $s \in \mathcal{S}$ injecte $in(s)$ paquets dans sa file d'attente.
- Chaque lien peut transmettre au plus 1 paquet, qui peut être perdu sans que l'émetteur n'en soit informé.
- Chacune des destinations $d \in \mathcal{D}$ extrait $\min\{q_t(d), out(d)\}$ paquets de sa file d'attente.

Nous supposons dans cette étude que tous les liens peuvent éventuellement transmettre simultanément. L'extension avec la prise en compte des interférences radio est discutée à la fin du chapitre. L'ensemble des liens qui transmettent au temps t est noté E_t .

Le réseau tel que nous venons de le définir et qui est représenté sur la Figure 6.1 est appelé un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau. Le taux d'arrivée du \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau est défini comme étant la somme des paquets injectés en chaque source à un instant donné : $\sum_{s \in \mathcal{S}} in(s)$.

Nous nous intéressons au nombre total de paquets en transit dans le réseau à un instant t . La définition suivante permet de quantifier ce nombre :

Définition 6.1 (Etat du \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau) L'état du réseau à l'instant t est défini par la fonction $P_t = \sum_{v \in V} q_t^2(v)$.

Tous les nœuds du \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau exécutent simultanément l'algorithme glouton de gradient local LGG (Algorithme 3) pour lequel il leur suffit d'avoir accès à la hauteur de leurs voisins.

Ainsi, à chaque étape t , chaque source $s \in \mathcal{S}$ reçoit $in(s)$ paquets dans sa file d'attente. Puis chaque nœud $u \in V$ envoie si possible un paquet vers ses voisins v de plus petite hauteur. Si c'est impossible par manque de paquets, i.e. si u a plus de voisins que de paquets, il sélectionne ses $q_t(u)$ voisins de plus petites hauteurs. Ce choix n'a pour autant aucun impact sur la stabilité du système. Nous appelons *envoi* du nœud u à un nœud v , la sélection d'une arête orientée (u, v) de l'émetteur vers le destinataire. L'ensemble des envois du nœud u au temps t est noté de $E_t(u)$ et $\cup_u E_t(u) = E_t$. Les paquets à destination d'un nœud v sont alors retirés de la file de u , et, pour chaque transmission réussie, un paquet est ajouté à celle de v . Enfin, chaque destination d extrait $\min\{out(d), q_t(d)\}$ paquets de sa file d'attente et l'étape t se termine.

Algorithme 3 : Algorithme LGG distribué

```

 $E_t(u) \leftarrow \emptyset$ 
 $q \leftarrow q_t(u)$ 
 $list(u) \leftarrow$  ordonner  $\Gamma(u)$  par  $q_t$  croissant
pour tout  $v \in list(u)$  faire
  si  $q_t(u) > q_t(v)$  &&  $q > 0$  alors
     $E_t(u) \leftarrow E_t(u) \cup \{(u, v)\}$ 
     $q \leftarrow q - 1$ 
 $\forall (u, v) \in E_t(u), u$  envoie un paquet à  $v$ 

```

La définition suivante introduit la notion de stabilité, très importante pour la suite de ce chapitre :

Définition 6.2 (Stabilité) *Considérons l'exécution de l'algorithme LGG sur un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau G . Alors LGG est dit stable sur G si le nombre de paquets en transit en chaque nœud du réseau est borné, i.e., la suite $(P_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est bornée.*

De manière similaire à la Section 4.1, et notamment à la Figure 4.2 (page 73), nous définissons G^* comme le multigraphe obtenu à partir de G en ajoutant une source virtuelle s^* et un puits virtuel d^* , un lien de capacité infinie entre s^* et s pour chaque $s \in \mathcal{S}$, et un lien de capacité $out(d)$ entre d et d^* pour chaque $d \in \mathcal{D}$.

Dans ce graphe étendu, nous cherchons à calculer un flot Φ de s^* à d^* vérifiant les contraintes suivantes :

- $\Phi(e) \leq c(e) = \begin{cases} 1 & \forall e \in E(G) \\ out(d) & \forall (d, d^*) \\ \infty & \forall (s^*, s) \end{cases}$
- $\sum_{e \in \Gamma^+(v)} \Phi(e) = \sum_{e \in \Gamma^-(v)} \Phi(e), \forall v \in V(G).$

Un tel flot dans G^* est dit réalisable et a pour valeur $f(\Phi) = \sum_{e=(s^*,s)} \Phi(e) = \sum_{e=(d,d^*)} \Phi(e)$. Dans la suite, nous notons f^* la valeur d'un s^* - d^* flot maximum dans G^* : $f^* = \max_{\Phi} f(\Phi)$. Nous pouvons remarquer que f^* est la valeur du \mathcal{S} - \mathcal{D} -flot maximum dans G étant donnée la capacité d'extraction des destinations $out(d)$.

Dans la suite, nous souhaitons comparer les performances de notre algorithme LGG avec un algorithme de flot qui enverrait les paquets en suivant les liens d'un flot maximum dans G^* . Pour cela, nous définissons la notion de réseau réalisable qui statue l'existence d'un flot de valeur au moins égale au taux d'arrivée dans LGG.

Définition 6.3 (\mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau réalisable) *Un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau G est réalisable s'il existe un s^* - d^* -flot Φ dans G^* tel que $in(s) \leq \Phi(s^*, s)$ pour toute source $s \in \mathcal{S}$.*

En particulier, si un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau est réalisable, alors il existe un s^* - d^* -flot maximum Φ de valeur f^* tel que $in(s) \leq \Phi(s^*, s)$, $\forall s \in \mathcal{S}$, et par conséquent $\sum_{s \in \mathcal{S}} in(s) \leq f^*$. Une manière différente de considérer un réseau réalisable est de regarder si un flot Φ existe dans G^* où les capacités des liens (s^*, s) sont fixées à $in(s)$. Cette définition est équivalente et sera plutôt utilisée dans la Section 6.3.

La suite de ce chapitre concerne la preuve de la stabilité du système lorsque le réseau est réalisable. En effet, nous pouvons facilement voir que le système peut diverger si $\sum_{s \in \mathcal{S}} in(s) > f^*$. Sans hypothèse supplémentaire concernant la perte des paquets, nous pouvons supposer que tous les paquets sont correctement transmis à chaque étape, sans perte au cours des transmissions. Il est alors suffisant de considérer une \mathcal{S} - \mathcal{D} coupe minimum (A, B) dans G telle que $\mathcal{S} \subseteq A$, qui est de valeur f^* d'après le théorème flot maximum - coupe minimum (Section 4.1.3). A chaque étape, au plus f^* paquets peuvent traverser le bord de la coupe. Cela signifie qu'au plus f^* paquets quittent l'ensemble A , alors qu'un nombre strictement supérieur à f^* y entrent, étant donné que toutes les sources s'y trouvent. Le nombre total de paquets stockés dans G augmente donc strictement, entraînant ainsi la divergence de la suite $(P_t)_{t \in \mathbb{N}}$ qui mesure l'état du réseau. Nous énonçons donc le théorème de stabilité pour un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau réalisable.

Théorème 6.1 *Soit G un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau. Si G est réalisable, alors le protocole LGG est stable sur G . Sinon, le nombre de paquets en transit peut diverger avec le temps quel que soit l'algorithme utilisé.*

Dans la suite, nous pouvons omettre l'adjectif réalisable lorsque nous parlons d'un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau G , devenu un prérequis pour la preuve du théorème.

Afin de prouver le Théorème 6.1, nous distinguons plusieurs cas selon la valeur de la différence entre le flot maximum et le taux d'arrivée aux nœuds sources. Nous nous intéressons séparément aux cas où cette différence est nulle et où elle est strictement positive.

Définition 6.4 (\mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau non saturé) *Un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau réalisable G est dit non saturé s'il existe un s^* - d^* -flot fractionnaire Φ dans G^* tel que $in(s) < \Phi(s^*, s)$ pour toute source $s \in \mathcal{S}$. Autrement, le réseau est dit saturé.*

En d'autres termes, un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau G est non saturé si son taux d'arrivée est strictement réalisable, c'est-à-dire s'il existe un s^* - d^* -flot réalisable dans G^* lorsque le taux d'arrivée est de $(1 + \varepsilon)in(s)$ en chaque source. Le cas d'un réseau non saturé correspond à la définition de la région de stabilité définie par Tassiulas et Ephremidis dans le cas général d'un multiflot [TE92].

Dans la section suivante, nous prouvons la stabilité du système dans le cas d'un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau non saturé, couvrant une partie de la preuve du Théorème 6.1 dans le cas d'un taux d'arrivée strictement réalisable. Nous introduisons ensuite un modèle étendu de réseau dans la Section 6.3, afin de prouver le Théorème 6.1 dans le cas général, incluant le cas d'un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau saturé.

6.2 Stabilité dans un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau non saturé

Cette section est consacrée à la preuve du lemme suivant :

Lemme 6.1 *Si le \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau G est non saturé, alors l'état P_t du réseau est borné supérieurement, quelque soit t .*

La preuve de ce lemme s'organise en deux parties. Dans un premier temps, nous allons montrer que l'évolution de l'état du réseau entre deux étapes consécutives est borné supérieurement. Dans un second temps, nous prouvons que si l'état du réseau est suffisamment grand à un instant donné, alors il décroît de manière significative à l'instant suivant. Ces deux propriétés permettent de déduire une borne supérieure de l'état du réseau quelque soit t , entraînant la stabilité du protocole LGG sur G .

Propriété 6.1 *L'accroissement de l'état du réseau entre deux étapes successives reste borné pour tout t :*

$$P_{t+1} - P_t \leq 5n\Delta^2.$$

Preuve : Comme G est non saturé, il existe un flot Φ de s^* à d^* dans G^* de valeur f^* tel que, pour toute source $s \in \mathcal{S}$, $in(s) < \Phi(s^*, s)$.

Considérons l'évolution de l'état du réseau entre l'étape t et la suivante :

$$\begin{aligned} P_{t+1} &= \sum_{v \in V} q_{t+1}^2(v) \\ &= \sum_{u \in V} q_t^2(v) + \sum_{v \in V} (q_{t+1}(v) - q_t(v))^2 + 2 \sum_{v \in V} q_t(v)(q_{t+1}(v) - q_t(v)). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Comme les liens de G ont une capacité unitaire, alors pour tout $v \in V$, $(q_{t+1}(v) - q_t(v)) \leq \Delta$, où Δ est le degré maximum de G . En fixant $\delta_t = \sum_{v \in V} q_t(v)(q_{t+1}(v) - q_t(v))$, nous obtenons :

$$P_{t+1} \leq P_t + 2\delta_t + n\Delta^2. \quad (6.2)$$

De manière équivalente, δ_t peut être défini en fonction des arcs de l'ensemble E_t utilisés par notre protocole LGG pour transmettre les paquets à l'étape t . Dans ce qui suit, $e = (u, v) \in E_t$ est orienté pour indiquer que le paquet a été transmis de u à v . Ainsi, nous obtenons une nouvelle formulation de δ_t :

$$\delta_t = \sum_{s \in \mathcal{S}} q_t(s)in(s) - \sum_{d \in \mathcal{D}} q_t(d) \min\{out(d), q_t(d)\} + \sum_{(u,v) \in E_t} (q_t(v) - q_t(u)). \quad (6.3)$$

Nous comparons maintenant la variation de P_t lors d'une exécution de LGG à celle qui serait obtenue en transmettant les paquets le long de chemins réalisant un flot maximum. Considérons l'ensemble des chemins reliant les sources \mathcal{S} aux destinations \mathcal{D} utilisés par le flot Φ , et E_t^Φ l'ensemble des arêtes (orientées des sources vers les puits) de ces chemins à l'étape t . Notons que comme le flot Φ considéré ne sature aucune source $s \in \mathcal{S}$, il peut donc ne pas être entier. En sommant de proche en proche le long de ces chemins, nous obtenons la différence des potentiels sur chaque saut des chemins :

$$\sum_{(u,v) \in E_t^\Phi} (q_t(v) - q_t(u)) = - \sum_{s \in \mathcal{S}} q_t(s)\Phi(s^*, s) + \sum_{d \in \mathcal{D}} q_t(d)\Phi(d, d^*). \quad (6.4)$$

Etudions maintenant la somme des différences de potentiel sur les liens utilisés par notre protocole LGG :

$$\begin{aligned} \sum_{(u,v) \in E_t} (q_t(v) - q_t(u)) &= \sum_{(u,v) \in E_t^\Phi} (q_t(v) - q_t(u)) - \sum_{(u,v) \in E_t^\Phi \setminus E_t} (q_t(v) - q_t(u)) \\ &\quad + \sum_{(u,v) \in E_t \setminus E_t^\Phi} (q_t(v) - q_t(u)). \end{aligned}$$

Par définition de LGG, pour tout $e = (u, v) \in E_t$, nous avons $q_t(v) - q_t(u) < 0$. Donc la somme sur les liens de $E_t \setminus E_t^\Phi$ est également négative : $\sum_{(u,v) \in E_t \setminus E_t^\Phi} (q_t(v) - q_t(u)) \leq 0$.

Si maintenant $e = (u, v) \in E_t^\Phi \setminus E_t$, alors, toujours par définition de LGG, nous avons soit $q_t(v) \geq q_t(u)$, soit $q_t(u) \leq \Delta$. En effet, si $q_t(v) < q_t(u)$, notre algorithme doit envoyer un paquet de u vers v , à moins que u n'ait déjà envoyé tous les paquets disponibles dans sa file d'attente à l'étape t . Donc

$$\sum_{(u,v) \in E_t^\Phi \setminus E_t} (q_t(v) - q_t(u)) \geq \sum_{(u,v) \in E_t^\Phi \setminus E_t} (-\Delta) \geq -n\Delta^2$$

et

$$\sum_{(u,v) \in E_t} (q_t(v) - q_t(u)) \leq -\sum_{s \in \mathcal{S}} q_t(s) \Phi(s^*, s) + \sum_{d \in \mathcal{D}} q_t(d) \Phi(d, d^*) + n\Delta^2.$$

A partir de ces équations intégrées dans l'Equation 6.3, nous en déduisons pour tout t :

$$\begin{aligned} \delta_t &\leq \sum_{s \in \mathcal{S}} q_t(s) (in(s) - \Phi(s^*, s)) \\ &\quad + \sum_{d \in \mathcal{D}} q_t(d) (\Phi(d, d^*) - \min\{out(d), q_t(d)\}) + n\Delta^2. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Comme le réseau est non saturé, par définition de Φ , $in(s) < \Phi(s^*, s)$ pour tout $s \in \mathcal{S}$. La somme sur les sources de G contribue négativement à la borne supérieure de δ_t , nous pouvons donc la négliger. Il en est de même pour la somme sur les destinations si $\min\{out(d), q_t(d)\} = q_t(d)$ et $\Phi(d, d^*) \leq q_t(d)$, ou si $\min\{out(d), q_t(d)\} = out(d)$. Le dernier cas à considérer est celui où $\min\{out(d), q_t(d)\} = q_t(d)$ et $\Phi(d, d^*) > q_t(d)$. Comme les liens dans le réseau G ont une capacité unitaire, le flot Φ est borné par Δ , ce qui donne $\sum_{d \in \mathcal{D}} q_t(d) (\Phi(d, d^*) - \min\{out(d), q_t(d)\}) \leq n\Delta^2$.

Nous obtenons finalement une borne supérieure pour δ_t : $\delta_t \leq 2n\Delta^2$. En particulier, à partir de l'Inégalité 6.2, cela borne la différence de l'état du réseau entre les étapes $t + 1$ et t :

$$P_{t+1} - P_t \leq 5n\Delta^2.$$

□

Nous introduisons ici la valeur $\varepsilon = \min_{s \in \mathcal{S}} (\Phi(s^*, s) - in(s))$ que nous savons strictement positive d'après l'hypothèse de non saturation du réseau.

Propriété 6.2 Soit $Y = (\frac{5nf^*}{\varepsilon} + 3n)\Delta^2$. Si P_t est suffisamment grand, i.e. $P_t > nY^2$, alors à l'étape suivante, le nombre de paquets en transit dans le réseau décroît strictement :

$$P_{t+1} - P_t < -5n\Delta^2.$$

Preuve : A partir de l'Inégalité 6.2, la preuve de la Propriété 6.2 revient à montrer que, si $P_t > nY^2$, alors $\delta_t < -3n\Delta^2$.

Cette preuve se divise en deux parties qui dépendent de l'existence d'un nœud de grande hauteur dans le réseau.

Supposons dans un premier temps qu'il existe une source $s \in \mathcal{S}$ telle que $q_t(s) \geq \frac{5n}{\varepsilon}\Delta^2$. Alors, en utilisant l'Inégalité 6.5 et la propriété de non saturation du réseau : $in(s) < \Phi(s^*, s)$, $\forall s \in \mathcal{S}$, nous pouvons borner δ_t supérieurement, prouvant ainsi la première partie de la Propriété 6.2 :

$$\delta_t \leq -\varepsilon q_t(s) + 2n\Delta^2 < -3n\Delta^2.$$

Supposons maintenant que pour tout $s \in \mathcal{S}$, $q_t(s) < \frac{5n}{\varepsilon}\Delta^2$. Dans ce cas, si $P_t \geq nY^2$, alors il existe $x \in V \setminus \mathcal{S}$ tel que $q_t(x) \geq Y$. Soit $x = u_1, u_2, \dots, u_k$ un chemin de x à u_k tel que $u_k = d \in \mathcal{D}$ (éventuellement $d = x$). Alors :

$$\sum_{i < k, q_t(u_i) > q_t(u_{i+1})} (q_t(u_{i+1}) - q_t(u_i)) - q_t(u_k) \min\{out(u_k), q_t(u_k)\} \leq -q_t(x).$$

Cette somme des différences de potentiel contribue donc négativement à $\sum_{(u,v) \in E_t} (q_t(v) - q_t(u)) - \sum_{d \in \mathcal{D}} q_t(d) \min\{out(d), q_t(d)\}$ (rappelons que les termes de la première partie de la somme sont négatifs puisqu'utilisés par LGG).

D'après l'Equation 6.3, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\delta_t &\leq \sum_{s \in \mathcal{S}} q_t(s) \text{in}(s) - q_t(x) \\ &< f^* \cdot \max_{s \in \mathcal{S}} q_t(s) - q_t(x) \leq f^* \cdot \frac{5n}{\varepsilon} \Delta^2 - q_t(x) \leq -3n\Delta^2.\end{aligned}$$

En injectant la borne de δ_t dans l'Inégalité 6.2, nous arrivons bien à borner strictement l'évolution de l'état du réseau :

$$P_{t+1} - P_t < -5n\Delta^2$$

terminant ainsi la preuve de la Propriété 6.2. \square

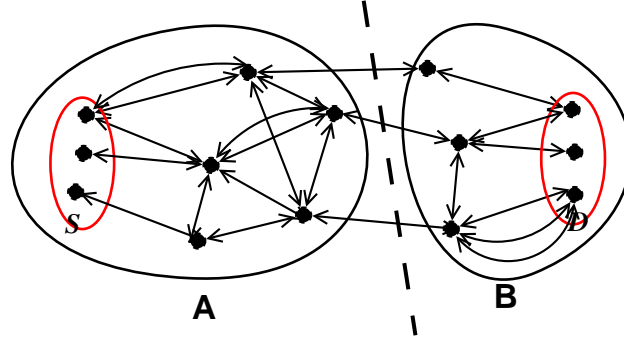
D'après les Propriétés 6.1 et 6.2, nous en déduisons que, pour tout t , la suite $P_t \leq nY^2 + 5n\Delta^2$. Cela prouve que le nombre de paquets en transit dans le réseau à chaque instant reste borné. La stabilité de notre algorithme dans un réseau non saturé est donc démontrée. Notons que les pertes de paquets ne font qu'améliorer la stabilité du protocole.

Dans le cas d'un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau saturé où un flot de valeur $(1 + \varepsilon)\text{in}(s)$ sur chaque lien (s^*, s) n'est pas réalisable, alors les techniques précédentes ne permettent pas de maîtriser les variations de la dérivée seconde dans l'équation 6.1 de l'évolution de l'état du réseau. Afin de prendre en compte ces phénomènes, nous devons généraliser le comportement du réseau avant d'aborder la preuve de stabilité par induction sur la taille du réseau. Cette généralisation est présentée dans la section suivante, à travers la définition des \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseaux R -généralisés.

6.3 \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé

Soient $G = (V, E)$ le \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau réalisable considéré dans les sections précédentes, et (A, B) une coupe minimum dans G^* : (A, B) est une partition des sommets de G^* telle que $s^* \in A$, $d^* \in B$, et la somme des capacités des arcs ayant une extrémité dans A et l'autre dans B est minimum. Dans le cas idéal où $\mathcal{S} \subseteq A$ et $\mathcal{D} \subseteq B$, (A, B) est appelée une \mathcal{S} - \mathcal{D} -coupe, représentée par un exemple dans la Figure 6.2.

La preuve du Théorème 6.1 utilise un schéma d'induction sur la taille du réseau $|V|$. Pour cela, nous avons besoin de définir un réseau généralisé afin de modéliser le comportement spécial des nœuds à la frontière de la coupe

FIGURE 6.2 – Une \mathcal{S} - \mathcal{D} -coupe minimum dans le \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau G .

(A, B) et pouvoir appliquer l'induction. Nous définissons ainsi les \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseaux R -généralisés, où $R \geq 0$ est une constante, et tel que tout \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau présenté jusqu'à maintenant est un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau 0-généralisé dans le nouveau modèle. Le principe de l'induction consiste alors à démontrer que pour tout $R \geq 0$ et dans tout \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé G réalisable, notre protocole LGG est stable. En particulier, cela prouve la stabilité de LGG dans tout \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau.

Plus précisément, nous prouvons successivement que les parties A et B de la coupe sont des \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseaux généralisés pour des constantes bien choisies, ce qui nous permet ensuite d'appliquer l'hypothèse d'induction. Plusieurs cas doivent être considérés suivant que les liens du bord de la coupe soit situés dans le réseau G ou sont des liens incidents aux sommets virtuels ajoutés dans G^* . Ces derniers cas sont abordés dans les Sections 6.4.1 et 6.4.2, et constituent la base de notre induction.

La généralisation du comportement du graphe est nécessaire dans le cas où la coupe (A, B) se situe dans G . Nous pouvons alors remarquer, dans un premier temps, que la partition B de la coupe peut être vue comme un cas particulier de \mathcal{S}' - \mathcal{D} -réseau, dans lequel \mathcal{S}' est l'ensemble des nœuds de B adjacents à un sommet de A , c'est-à-dire pour lesquels il existe un lien du bord de la coupe (A, B) dont ils sont une extrémité, l'autre étant dans A . Chacun de ces nœuds $s' \in \mathcal{S}'$ représente alors une source dans B qui injecte au plus $|\Gamma_A(s')| + in(s')$ paquets dans sa file d'attente à chaque étape, où $\Gamma_A(s')$ représente le voisinage de s' dans A , et $in(s') > 0$ dans le cas où $s' \in \mathcal{S}$ dans G . L'hypothèse de pertes aléatoires des paquets permet de valider le cas où s' envoie des paquets vers un sommet situé dans la partition A . De même si $s' \in \mathcal{D}$ est une destination qui extrait un certain nombre de paquets du réseau, alors les paquets extraits peuvent être vus comme perdus dans le réseau original. Afin de généraliser ce comportement,

nous définissons des pseudo-sources au comportement plus souple que les sources classiques précédemment définies.

Définition 6.5 (Pseudo-source) Une pseudo-source s injecte au plus $in(s) > 0$ paquets dans sa file d'attente au début de chaque étape.

Cette notion sera utilisée plus tard afin de prouver que le nombre de paquets en transit dans B reste borné.

Dans un second temps, en supposant que le nombre de paquets dans B est borné par une constante R , la partition A peut également être vue comme un \mathcal{S} - \mathcal{D}' -réseau, où \mathcal{D}' contient l'ensemble des sommets de A adjacent à B , et tel que chaque $d' \in \mathcal{D}'$ possède le comportement généralisé suivant. Tout d'abord, si la file d'attente de d' est assez haute ($q_t(d') > R$ pour une certaine constante R), alors d' extrait au moins $\min\{|\Gamma_B(d')| + out(d'), q_t(d') - R\}$ paquets de sa file d'attente (puisque d' a une hauteur plus haute que chacun de ses voisins situés dans B). De plus, puisque les sommets de \mathcal{D}' dont les hauteurs sont inférieures à R peuvent recevoir des paquets provenant de sommets de B , leur comportement vis à vis de A peut s'interpréter comme s'ils avaient la possibilité de cacher aux autres sommets de A l'existence d'un certain nombre de paquets dans leur file d'attente. En d'autres termes, pour chaque $d' \in \mathcal{D}'$ tel que $q_t(d') \leq R$, d' peut déclarer n'importe quelle hauteur $q'_t(d') \leq R$ aux sommets de A , généralisant ainsi le comportement des nœuds destinations.

Définition 6.6 (R -pseudo-destination) Une R -pseudo-destination d extrait au plus $out(d) > 0$ paquets à chaque fin d'étape et, étant donnée une constante de rétention $R \geq 0$:

- (i) si $q_t(d) > R$, alors d extrait au moins $\min\{out(d), q_t(d) - R\}$ paquets de sa file d'attente,
- (ii) pour chaque nœud $u \in \Gamma(d)$, d se comporte comme s'il avait une hauteur $q'_t(d)$ définie comme suit :
 - si $q_t(d) > R$, alors d déclare $q'_t(d) = q_t(d)$,
 - si $q_t(d) \leq R$, alors d déclare une hauteur $q'_t(d) \leq R$.

En combinant ces définitions utiles pour la preuve par induction, nous généralisons maintenant le modèle de réseau en définissant un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé possédant des ensembles de sources et destinations R -généralisées définies comme suit :

Définition 6.7 (Source/destination R -généralisée) Soit $R \geq 0$. Un nœud R -généralisé v injecte au plus $in(v) > 0$ paquets dans sa file d'attente au début de chaque étape, extrait au plus $out(v) > 0$ paquets de sa file à la fin de chaque étape, et :

- (i) si $q_t(d) > R$, alors d extrait au moins $\min\{out(d), q_t(d) - R\}$,
- (ii) pour chaque nœud $u \in \Gamma(d)$, d se comporte comme s'il avait une hauteur $q'_t(d)$ définie comme suit :
 - si $q_t(d) > R$, alors d déclare $q'_t(d) = q_t(d)$,
 - si $q_t(d) \leq R$, alors d déclare une hauteur $q'_t(d) \leq R$.

Si $in(v) \leq out(v)$, alors v est appelée destination R -généralisée, sinon c'est une source R -généralisée.

Définition 6.8 (\mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé) Un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé est un multigraphe G possédant un ensemble \mathcal{S} de sources R -généralisées, et un ensemble \mathcal{D} de destinations R -généralisées. Tous les autres nœuds de G ($v \in V \setminus (\mathcal{S} \cup \mathcal{D})$) gardent un comportement "classique", c'est-à-dire comme dans un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau défini dans la Section 6.1.

Remarque : Tout nœud v du réseau ne faisant pas partie de $\mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ est considéré comme ayant $in(v) = out(v) = 0$. Néanmoins, ces valeurs peuvent changer au cours de l'application de l'hypothèse d'induction, v devenant ainsi une source ou une destination R -généralisée.

Un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau est clairement un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau 0-généralisé. En effet, d'après la Définition 6.7, les sources et destinations 0-généralisées ont les propriétés suivantes :

- une source s injecte au plus $in(s)$ paquets dans sa file d'attente au début de chaque étape,
- une destination d extrait au plus $out(d)$ paquets, et au moins $\min\{out(d), q_t(d)\}$ paquets de sa file d'attente à la fin de chaque étape (car $R = 0$ nous amène dans le cas (i) de la Définition 6.7). Elle ne ment jamais sur la hauteur de sa file puisque $q_t(d)$ est toujours positive ou nulle, donc supérieure à R .

Nous pouvons alors supposer que des paquets sont perdus de telle manière à modéliser le fait que moins de $in(s)$ paquets peuvent être injectés par s dans le réseau. En contrepartie, le comportement est le même que dans un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau.

Un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé G est *réalisable* si son taux d'arrivée est réalisable, c'est-à-dire s'il existe un s^* - d^* -flot Φ tel que $in(v) \leq \Phi(s^*, v)$ pour tout $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$, où s^* et d^* sont des nœuds virtuels ajoutés à G , formant ainsi un réseau généralisé étendu G^* (de la même manière que dans la Section 6.1). En particulier, G est réalisable s'il existe un flot Φ réalisable dans G^* où les capacités des liens (s^*, v) sont fixées à $in(v)$, $\forall v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$: ainsi, $\Phi(s^*, v) = in(v)$, $\forall v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ (Figure 6.3). Un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé G est *non saturé* s'il existe un s^* - d^* flot Φ réalisable dans G^* où les capacités des liens (s^*, v) sont de $(1 + \varepsilon)in(v)$, $\forall v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$. De manière équivalente, nous pouvons nous ramener à la Définition 6.4 dans le cas où les arcs (s^*, v) sont de capacité infinie dans G^* .

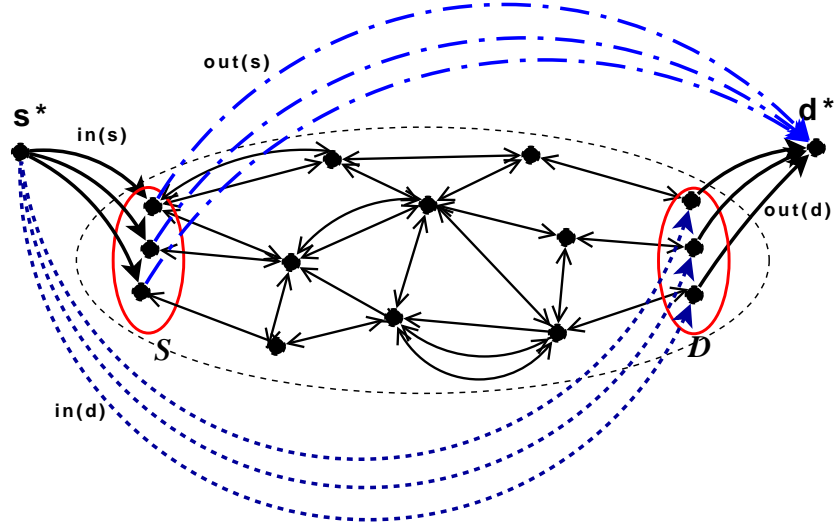


FIGURE 6.3 – Un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé étendu G^* .

6.4 Stabilité d'un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé

Cette section est consacrée à la preuve de la stabilité de notre algorithme LGG dans un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé réalisable, sous réserve de la conjecture suivante :

Conjecture 6.1 *Si notre protocole est stable dans un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé réalisable dans lequel les sources généralisées $s \in \mathcal{S}$ injectent tout le temps exactement $in(s)$ paquets dans leur file d'attente, et lorsque les paquets ne sont jamais*

perdus, alors LGG est stable si les sources peuvent injecter moins que $in(s)$ paquets à chaque étape, et en présence de pertes de paquets.

Il est en effet naturel de penser qu'il existe une forme de domination des processus de génération de paquets : le fait de ne pas injecter des paquets ne tend pas à faire diverger le système. Si la séquence des $in_t(v)$ est strictement supérieure à une autre séquence $in'_t(v)$ pour tout temps t et tout sommet $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$, alors le système aura plus tendance à diverger avec la séquence in_t qu'avec in'_t .

Sous réserve de cette conjecture, nous prouvons dans la suite de ce chapitre le théorème suivant :

Théorème 6.2 *Pour toute constante $R \geq 0$, et dans tout \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé G réalisable, le protocole LGG est stable. En particulier, LGG est stable dans tout \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau réalisable.*

Ce théorème est une reformulation du Théorème 6.1 afin de prouver la stabilité de LGG dans les \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseaux R -généralisés, pour tout $R \geq 0$. Comme nous avons montré dans la section précédente qu'un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau est un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau 0-généralisé, la preuve de la stabilité de LGG pour les \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseaux dans le cas saturé sera complète.

Considérons le \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé réalisable $G = (V, E)$, avec $R \geq 0$. Si $|V| = 1$, notre protocole est trivialement stable. Supposons alors que $|V| > 1$. Nous définissons Φ comme un s^* - d^* -flot maximum dans G^* tel que $in(v) = \Phi(s^*, v)$, $\forall v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$, et (A, B) une coupe minimum dans G^* , de valeur $|(A, B)| = \sum_{v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}} in(v)$. Trois cas peuvent alors se présenter :

1. une telle coupe (A, B) est unique et correspond à $(\{s^*\}, (V \cup \{d^*\}) \setminus \{s^*\})$: nous prouvons dans la Section 6.4.1 que G est non saturé, et donc que notre protocole est stable par une adaptation de la preuve de la Section 6.2,
2. une unique autre coupe existe et correspond à $((V \cup \{s^*\}) \setminus \{d^*\}, \{d^*\})$: nous prouvons dans la Section 6.4.2 la stabilité de notre protocole sous réserve de la Conjecture 6.1,
3. il existe une telle coupe (A, B) dans G : nous prouvons dans la Section 6.4.3 la stabilité en appliquant l'hypothèse d'induction sur la taille de G , comme introduit au début de la section précédente.

Notons que les cas 1 et 2 correspondent à la base de notre induction.

6.4.1 \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé non saturé

Dans le cas où l'unique coupe minimum (A, B) dans G^* est telle que $A = \{s^*\}$, cela signifie que le flot est uniquement contraint par ce qui est injecté dans le réseau au niveau de la source virtuelle s^* , i.e. par les capacités $in(v)$ sur chacun des liens (s^*, v) , $\forall v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$. Il existe donc une constante $\varepsilon > 0$ assurant un flot Φ réalisable dans le réseau où le taux d'arrivée est $(1 + \varepsilon)in(v)$ en chaque nœud $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$. Ceci est la définition d'un réseau non saturé que nous pouvons retrouver dans la Section 6.1 pour un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau classique.

La preuve de stabilité dans le cas d'un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé non saturé est une adaptation de la preuve de la Section 6.2. Dans la suite, nous nous concentrons sur les différences principales de la preuve entre le cas d'un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau et celui d'un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé. Rappelons dans notre cas que le flot Φ qui ne sature pas le réseau est un s^* - d^* -flot réalisable tel que $in(v) < \Phi(s^*, v)$ pour tout $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$. Le lemme que nous prouvons dans la suite est le suivant :

Lemme 6.2 *Si le \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé G est non saturé, alors l'état du réseau P_t est borné supérieurement quelque soit t .*

Comme dans la Section 6.2, nous décomposons la preuve du lemme ci-dessus en deux propriétés bornant la différence de l'état du réseau entre deux étapes successives. La première propriété borne supérieurement l'évolution de l'état du réseau.

Propriété 6.3 *L'accroissement de l'état du réseau entre deux étapes successives reste borné pour tout t :*

$$P_{t+1} - P_t \leq 2|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|(R + out_{max})out_{max} + \Delta^2(3n - 2|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|) + 4|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|\Delta R,$$

où $out_{max} = \max_{v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}} out(v)$.

Preuve : D'après l'équation 6.1 de l'évolution de l'état du réseau au cours d'une étape, nous cherchons à borner supérieurement l'expression de δ_t .

A chaque étape t , une source/destination R -généralisée v de G injecte $in_t(v) \leq in(v) < \Phi(s^*, v)$ paquets dans sa file d'attente $q_t(v)$. De même, v extrait $out_t(v) \leq \min\{out(v), q_t(v)\}$ paquets de sa file, avec $out_t(v) \geq \min\{out(v), q_t(v)\}$ si $q_t(v) > R \geq \Delta$, et $out_t(v) \geq 0$ sinon.

Dans ces conditions, la première différence par rapport à la preuve de la Section 6.2 se produit dans l'Equation 6.3 qui devient :

$$\delta_t = \sum_{(u,v) \in E_t} (q_t(v) - q_t(u)) + \sum_{s \in \mathcal{S}} q_t(s)(in_t(s) - out_t(s)) - \sum_{d \in \mathcal{D}} q_t(d)(out_t(d) - in_t(d)). \quad (6.6)$$

Nous comparons maintenant la somme des différences de potentiel sur les liens utilisés par notre protocole LGG. Comme dans la Section 6.2, nous décomposons la somme suivant l'appartenance des liens à E_t^Φ , $E_t^\Phi \setminus E_t$, ou $E_t \setminus E_t^\Phi$. La généralisation du réseau ne change pas le comportement du flot. Néanmoins, le fait que les sources et les destinations R -généralisées puissent à la fois injecter et extraire des paquets entraîne une modification de l'Equation 6.4 :

$$\begin{aligned} & \sum_{(u,v) \in E_t^\Phi} (q_t(v) - q_t(u)) \\ &= \sum_{d \in \mathcal{D}} q_t(d)(\Phi(d, d^*) - \Phi(s^*, d)) - \sum_{s \in \mathcal{S}} q_t(s)(\Phi(s^*, s) - \Phi(s, d^*)) \\ &= \sum_{v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}} q_t(v)(\Phi(v, d^*) - \Phi(s^*, v)) \end{aligned}$$

Par définition de LGG, pour un lien $e = (u, v) \in E_t \setminus E_t^\Phi$, $q_t(v) - q_t(u) < 0$, à moins que $u \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ ou $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ ne mente sur la hauteur de sa file d'attente. Supposons par exemple que v mente. Alors, cela signifie que $q_t(u) \leq q_t(v) \leq R$ mais v annonce une hauteur $q'_t(v) \leq q_t(u)$. Donc la différence $q_t(v) - q_t(u) \leq R$. Supposons maintenant que v ne mente pas. Alors c'est u qui ment en annonçant une hauteur $R \geq q'_t(u) \geq q_t(v)$, ce qui borne également la différence $q_t(v) - q_t(u)$ par R .

Donc pour chaque nœud u voisin de $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$, la différence $q_t(v) - q_t(u)$ est bornée supérieurement par R . Il en est de même pour chaque nœud v voisin de $u \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$, entraînant l'inégalité suivante :

$$\sum_{(u,v) \in E_t \setminus E_t^\Phi} (q_t(v) - q_t(u)) \leq 2|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|\Delta R.$$

Pour les liens du flot qui ne sont pas utilisés par notre algorithme : $e = (u, v) \in E_t^\Phi \setminus E_t$, les cas qui nous importent sont ceux où $q_t(v) - q_t(u) \leq 0$ (ce qui contribue positivement à la somme des différences des potentiels $\sum_{(u,v) \in E_t} (q_t(v) - q_t(u))$)

que nous cherchons à borner). Mais si ces liens (u, v) pour lesquels $q_t(v) \leq q_t(u)$ ne sont pas utilisés par LGG, alors cela signifie plusieurs choses :

- $q_t(u) \leq \Delta$ et u a déjà envoyé tous ses paquets à ses voisins de plus petite hauteur. Alors la différence $q_t(v) - q_t(u)$ est bornée inférieurement par $-\Delta$ comme nous l'avons vu dans la Section 6.2.
- $u \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ ment sur la hauteur de sa file. Nous sommes donc dans le cas où $q_t(v) \leq q_t(u) \leq R$, mais u annonce une hauteur $q'_t(u) < q_t(v)$. Alors la différence $q_t(v) - q_t(u) \geq q_t(v) - R \geq -R$.
- $u \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ ne ment pas sur sa hauteur. Dans ce cas v ment et annonce une hauteur $R \geq q'_t(v) > q_t(u)$. La différence $q_t(v) - q_t(u)$ est donc toujours bornée inférieurement par $-R$.

Ainsi, la différence des hauteurs $q_t(v) - q_t(u)$ est bornée inférieurement par $-R$ si $u \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ ou $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$, et par $-\Delta$ sinon, entraînant la borne inférieure suivante :

$$\sum_{(u,v) \in E_t^\Phi \setminus E_t} (q_t(v) - q_t(u)) \geq -\Delta^2(n - 2|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|) - 2|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|\Delta R.$$

En reportant ces inégalités dans le calcul des différences de potentiel des liens de LGG, nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \sum_{(u,v) \in E_t} (q_t(v) - q_t(u)) &\leq \sum_{v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}} q_t(v)(\Phi(v, d^*) - \Phi(s^*, v)) \\ &\quad + \Delta^2(n - 2|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|) + 4|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|\Delta R. \end{aligned}$$

En reportant cette inégalité dans celle de δ_t (Eq. 6.6), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta_t &\leq \sum_{v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}} q_t(v) ((in_t(v) - \Phi(s^*, v)) - (out_t(v) - \Phi(v, d^*))) \\ &\quad + \Delta^2(n - 2|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|) + 4|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|\Delta R. \end{aligned} \tag{6.7}$$

A partir de cette équation, nous avons les propriétés suivantes :

- $\forall s \in \mathcal{S}, \Phi(s^*, s) > in(s)$ puisque le \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé est non saturé, et $in(s) \geq in_t(s)$ d'après la définition d'une source R -généralisée. Donc $in_t(v) - \Phi(s^*, v) < 0$ pour tout sommet v dans \mathcal{S} .
- $\forall d \in \mathcal{D}, \Phi(s^*, d) \geq in(d)$ d'après la définition d'un réseau réalisable.
- $\forall v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$: si $\Phi(v, d^*) \leq out_t(d)$, alors

$$\delta_t \leq \Delta^2(n - 2|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|) + 4|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|\Delta R.$$

Si au contraire $\Phi(v, d^*) > out_t(d)$, alors $q_t(v) \leq R + out(v)$. En effet, si $q_t(v) > R + out(v)$, alors $out_t(v) \geq \min\{q_t(v) - R, out(v)\} = out(v) \geq \Phi(v, d^*)$, ce qui entraîne une contradiction. Donc,

$$\begin{aligned} \delta_t &\leq \sum_{v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}} (R + out(v))out(v) + \Delta^2(n - 2|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|) + 4|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|\Delta R \\ &\leq |\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|(R + \max_{v \in (\mathcal{S} \cup \mathcal{D})} out(v)) \max_{v \in (\mathcal{S} \cup \mathcal{D})} out(v) \\ &\quad + \Delta^2(n - 2|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|) + 4|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|\Delta R \end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu une borne supérieure de δ_t indépendante du temps. D'après l'Inégalité 6.2, l'évolution de l'état du réseau entre deux étapes consécutives est donc bornée supérieurement. \square

La deuxième propriété nécessaire à la preuve de la stabilité de LGG sur le \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé non saturé est le suivant :

Propriété 6.4 *Etant donnée une constante Y suffisamment grande, si $P_t > nY^2$, alors à l'étape suivante, le nombre de paquets en transit dans le réseau décroît strictement :*

$$P_{t+1} - P_t < -2|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|(R + out_{max})out_{max} - \Delta^2(3n - 2|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|) - 4|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|\Delta R,$$

où $out_{max} = \max_{v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}} out(v)$.

Preuve : Posons $A = 2|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|(R + out_{max})out_{max} + \Delta^2(3n - 2|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|) + 4|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|\Delta R$. D'après l'Inégalité 6.2, prouver la Propriété 6.4 revient à démontrer que, si $P_t \geq nY^2$, alors $\delta_t < -\frac{A+n\Delta^2}{2}$. Comme dans la Section 6.2, cette preuve s'organise en deux temps.

Premièrement, supposons qu'il existe un nœud généralisé $x \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ tel que $q_t(x) > \frac{\Delta^2(3n-2|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|)+7|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|R\Delta+|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|(R+out_{max})out_{max}}{\varepsilon}$. Rappelons que $\varepsilon = \min_{v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}} (\Phi(s^*, v) - in(v))$. Alors, d'après l'Equation 6.7 et le fait que $in_t(v) - \Phi(s^*, v) \leq in(v) - \Phi(s^*, v) < -\varepsilon$ pour tout $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ et pour $\varepsilon > 0$, nous obtenons comme dans la Section 6.2 :

$$\begin{aligned} \delta_t &\leq -\varepsilon q_t(s) + \Delta^2(n - |\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|) + 5|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|\Delta R \\ &< -\frac{A+n\Delta^2}{2} \end{aligned}$$

ce qui prouve la première partie de la Propriété 6.4.

Deuxièmement, nous considérons le cas où $q_t(v) \leq$

$\frac{\Delta^2(3n-2|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|)+7|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|\Delta+|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|(R+out_{max})out_{max}}{\varepsilon}$, $\forall v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$. Dans ce cas, si $P_t \geq nY^2$, alors il existe un sommet $x \in V \setminus (\mathcal{S} \cup \mathcal{D})$ de grande hauteur et un chemin de x à une destination défini comme dans la Section 6.2. La somme des différences de potentiel sur ce chemin vaut :

$$\sum_{i < k, q_t(u_i) > q_t(u_{i+1})} (q_t(u_{i+1}) - q_t(u_i)) \leq q_t(u_k) - q_t(x).$$

Rappelons que pour tout $e = (u, v) \in E_t$ avec $v \notin \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$, ou avec $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ et $q_t(v) > R$ (respectivement avec $u \notin \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$, ou alors avec $u \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ et $q_t(u) > R$), nous avons $q_t(v) - q_t(u) < 0$. En outre, pour tout $e = (u, v) \in E_t$ tel que $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ et $q_t(v) \leq R$ (respectivement $u \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ et $q_t(u) \leq R$), nous avons $q_t(v) - q_t(u) \leq R$.

La somme des différences de potentiel sur les liens utilisés par LGG est donc bornée par l'équation suivante :

$$\sum_{(u,v) \in E_t} (q_t(v) - q_t(u)) \leq 2|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|\Delta R + q_t(u_k) - q_t(x).$$

Nous avons également la borne inférieure suivante :

$$\sum_{d \in \mathcal{D}} q_t(d)(out_t(d) - in_t(d)) \geq \sum_{d \in \mathcal{D}} q_t(d) - (R+1)f^*$$

car si $q_t(d) \leq R$ pour une destination R -généralisée d , alors $out_t(d) \leq in_t(d) + 1$ par définition des destinations R -généralisées. De plus, par définition de la valeur du s^*-d^* -flot maximum f^* , $\sum_{d \in \mathcal{D}} in_t(d) \leq f^*$.

D'après l'Equation 6.6, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \delta_t &\leq \sum_{s \in \mathcal{S}} q_t(s)(in_t(s) - out_t(s)) + (R+1)f^* \\ &\quad - \sum_{d \in \mathcal{D}} q_t(d)(out_t(d) - in_t(d)) + 2(|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|)\Delta R + q_t(u_k) - q_t(x) \\ &\leq \sum_{s \in \mathcal{S}} q_t(s)(in_t(s) - out_t(s)) + (R+1)f^* + 2|\mathcal{S} \cup \mathcal{D}|\Delta R - q_t(x). \end{aligned}$$

En choisissant Y assez grand pour que $q_t(x) > Y$, la propriété 6.4 est satisfaite. \square

D'après les Propriété 6.3 et 6.4, nous déduisons que pour tout t , l'état du réseau P_t est borné, ce qui limite le nombre de paquets en transit dans le \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé à chaque étape et valide la stabilité de notre algorithme.

6.4.2 \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé saturé aux destinations

Dans ce cas, nous supposons que $\forall v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}, in_t(v) = in(v)$ pour tout temps t , et qu'il n'y a pas de pertes de paquets. Nous prouvons la stabilité de LGG dans ce cas particulier. La Conjecture 6.1 permet de conclure la stabilité dans le cas plus général où $in_t(v) \leq in(v)$ et avec des pertes de paquets éventuelles.

$(\{s^*\}, (V \cup \{d^*\}) \setminus \{s^*\})$ n'est pas, dans ce cas, la seule coupe minimum dans G^* . Une seconde coupe existe et se situe au niveau de la destination virtuelle d^* : $(A, B) = ((V \cup \{s^*\}), \{d^*\})$. En d'autres termes, la partition B de la coupe se réduit au sommet d^* . La valeur de la coupe vaut $|(A, B)| = \sum_{v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}} in(v) = \sum_{v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}} out(v)$.

Dans le \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé G , supposons qu'il existe un temps t_0 et une constante $R' \geq R + \max_{v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}} out(v)$ tels que pour tout $t \geq t_0$ et tout sommet $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$, $q_t(v) \geq R'$. D'après la définition des nœuds R -généralisés, si $q_t(v) > R + out(v)$, alors v extrait exactement $out(v)$. A chaque instant $t \geq t_0$, le taux d'arrivée de notre algorithme étant au plus égal au taux d'extraction des sources/destinations R -généralisées du réseau, le nombre de paquets en transit dans le réseau évolue comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} q_{t+1}(v) &= \sum_{v \in V} q_t(v) - \sum_{v \in V} out(v) + \sum_{v \in V} in(v) \\ &\leq \sum_{v \in V} q_t(v) \leq \sum_{v \in V} q_{t_0}(v) \end{aligned}$$

L'état du réseau est donc borné au cours du temps.

Dans le cas contraire, supposons qu'il existe au moins un nœud $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ qui est infiniment borné selon la définition suivante :

Définition 6.9 (Nœud infiniment borné) *Un sommet est dit infiniment borné s'il existe une constante telle que la taille de la file d'attente de ce sommet repasse une infinité de fois en dessous de cette constante. Plus formellement, un sommet $v \in V$ est infiniment borné si $\exists M > 0$ telle que $\forall t_0, \exists t \geq t_0$ tel que $q_t(v) \leq M$.*

Nous disons qu'un ensemble de sommets est infiniment borné si tous ses sommets le sont.

Dans notre \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé G , supposons qu'il existe une constante $R' \geq R + \max_{v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}} out(v)$ et un sommet $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ tel que $\forall t_0, \exists t_1 \geq t_0$ tel que $q_t(v) \leq R'$. Choisissons alors un ensemble W infiniment bornés, maximal pour

l'inclusion, contenant un sommet de $\mathcal{S} \cup \mathcal{D}$. La taille de W est définie comme la somme des tailles des files d'attente des sommets de W .

Tous les nœuds de W étant infiniment bornés, il existe une infinité de temps $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ telle que la taille de W est minimum entre t_i et t_{i+1} , et avec $q_{t_i}(w) \leq R'$ pour tout $w \in W$. Le nombre de paquets en transit dans W au temps $t_i - 1$ est donc strictement supérieur à celui au temps t_i : $\sum_{w \in W} q_{t_i}(w) < \sum_{w \in W} q_{t_i-1}(w)$.

L'évolution de la taille de W entre les étapes $t_i - 1$ et t_i est par ailleurs la suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{w \in W} q_{t_i-1}(w) = & \sum_{w \in W} q_{t_i}(w) + \sum_{w \in W} out_{t_i-1}(w) - \sum_{w \in W} in_{t_i-1}(w) \\ & - |\{(u, v) \in E_{t_i-1}, u \notin W, v \in W\}| \\ & + |\{(u, v) \in E_{t_i-1}, u \in W, v \notin W\}|, \end{aligned}$$

où E_{t_i-1} correspond à l'ensemble des arcs utilisés par notre protocole à l'instant $t_i - 1$.

De plus, $\sum_{w \in W} out_{t_i-1}(w) \leq \sum_{w \in W} out(w)$ d'après la définition des destinations R -généralisées, et $\sum_{w \in W} in_{t_i-1}(w) \leq \sum_{w \in W} in(w)$ d'après l'hypothèse énoncée au début de la section.

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \sum_{w \in W} q_{t_i}(w) < & \sum_{w \in W} q_{t_i-1}(w) = \sum_{w \in W} q_{t_i}(w) + \sum_{w \in W} out(w) - \sum_{w \in W} in(w) \\ & - |\{(u, v) \in E_{t_i-1}, u \notin W, v \in W\}| \\ & + |\{(u, v) \in E_{t_i-1}, u \in W, v \notin W\}|. \end{aligned}$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} \sum_{w \in W} out(w) > & \sum_{w \in W} in(w) \\ & + |\{(u, v) \in E_{t_i-1}, u \notin W, v \in W\}| \\ & - |\{(u, v) \in E_{t_i-1}, u \in W, v \notin W\}| \end{aligned}$$

Or, comme la coupe $((V \cup \{s^*\}), \{d^*\})$ est minimum, $\sum_{w \in W} out(w) < \sum_{w \in W} in(w) + |C|$, où C est l'ensemble des liens incidents à W dans G . Donc $|C| = |\{(u, v) \in E_{t_i-1}, u \notin W, v \in W\}| + |\{(u, v) \in E_{t_i-1}, u \in W, v \notin W\}|$, ce

qui donne l'inégalité :

$$\begin{aligned} \sum_{w \in W} out(w) &< \sum_{w \in W} in(w) \\ &+ |\{(u, v) \in E_{t_i-1}, u \notin W, v \in W\}| \\ &+ |\{(u, v) \in E_{t_i-1}, u \in W, v \notin W\}| \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre de paquets envoyés à l'étape $t_i - 1$ depuis un sommet situé dans W vers un sommet de $V \setminus W$ est non nul. Cela signifie qu'il existe au moins un sommet $w \in V \setminus W$ dont la taille de sa file d'attente est plus petite que celle d'un sommet de W . Nous obtenons donc une contradiction sur le fait que W est l'ensemble maximal pour l'inclusion des nœuds infiniment bornés.

Quelque soit l'ensemble W choisi, nous trouvons un nœud de $V \setminus W$ infiniment borné. Comme W est infiniment borné et que le réseau est de taille finie, il existe un nœud v^* infiniment borné tel que $W \cup \{v^*\}$ est infiniment borné. De cette manière, nous arrivons à la conclusion que V est infiniment borné.

Ainsi, tous les sommets du réseau ont une file d'attente de taille bornée ($q_t(v) \leq R'$) une infinité de fois. Or, comme le nombre de paquets injectés à chaque temps t est égal à la capacité d'extraction des sources/destinations R -généralisées, le nombre de paquets en transit dans le réseau ne peut jamais décroître. Ce qui nous permet de conclure que le nombre de paquets en transit dans le réseau reste borné, quelque soit t .

Nous avons donc prouvé la stabilité de notre protocole dans le cas où le \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé G est saturé au niveau des destinations, sous réserve de la Conjecture 6.1.

6.4.3 \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau R -généralisé saturé

Dans ce cas, (A, B) est une coupe minimum de valeur $\sum_{v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}} in(v)$ telle que $|A|, |B| > 1$ et $|A|, |B| < |V|$. Nous allons donc prouver successivement que les partitions A et B peuvent être vues comme deux réseaux généralisés. Notre hypothèse d'induction est la suivante :

Notre protocole LGG est stable sur tout \mathcal{S}' - \mathcal{D}' -réseau R' -généralisé de n nœuds, $\forall R' \geq 0, n < |V|$, avec $|V| > 1$.

Dans la suite de cette section, nous démontrons par induction, à partir de cette hypothèse, que notre protocole est stable sur G .

6.4.3.1 Le nombre de paquets en transit dans B est borné

Nous montrons ici que la partition B de la coupe (A, B) peut être vu comme un \mathcal{S}' - \mathcal{D}' -réseau R -généralisé réalisable, et donc, que le nombre de paquets en transit dans B est borné.

Nous construisons un \mathcal{S}' - \mathcal{D}' -réseau B' qui se comporte comme B dans le réseau G . Soit X l'ensemble des sommets de B adjacents aux sommets de la partition A . Considérons alors le réseau B' contenant un ensemble de sources R -généralisées \mathcal{S}' et un ensemble de destinations R -généralisées \mathcal{D}' , tels que $\mathcal{S}' \cup \mathcal{D}' = X \cup (\mathcal{D} \cap B) \cup (\mathcal{S} \cap B)$, définis de la façon suivante :

- chaque nœud dans $B \setminus X$ garde le même comportement dans B' que celui qu'il avait dans B (et donc dans G) ;
- chaque nœud $v \in X \setminus (\mathcal{S} \cup \mathcal{D})$ devient une source R -généralisée de \mathcal{S}' avec $in_{B'}(v) = |\Gamma_{|A}(v)|$, et $out_{B'}(v) = 0$;
- les paramètres $in(v)$ et $out(v)$ des sommets de $X \cap (\mathcal{S} \cup \mathcal{D})$ sont modifiés dans B' et deviennent respectivement $in_{B'}(v) = in(v) + |\Gamma_{|A}(v)|$, et $out_{B'}(v) = out(v)$. Si $in_{B'}(v) \geq out_{B'}(v)$, alors $v \in \mathcal{S}'$, sinon $v \in \mathcal{D}'$.

Par hypothèse d'induction, si le \mathcal{S}' - \mathcal{D}' -réseau R -généralisé B' est réalisable, alors LGG est stable sur B' . En effet, par définition de B' , nous pouvons choisir un nombre de paquets injectés aux nœuds de X , de manière à ce que B' se comporte comme B dans le réseau G . Donc si LGG est stable sur B' , alors il le sera sur B . Dans la suite, nous montrons que le réseau B' est réalisable afin de prouver que le nombre de paquets dans B reste borné.

Comme (A, B) est une coupe de valeur $\sum_{v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}} in(v)$, chaque lien de la coupe transporte une unité de flot Φ . Par définition d'une source R -généralisée et par choix des caractéristiques des nœuds de l'ensemble X , le flot $\Phi_{B'}$ qui injecte $in(v)$ paquets en chaque source/destination $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ R -généralisée, et qui suit les arcs utilisés par le flot Φ dans G est réalisable. En effet, d'après la propriété de conservation du flot, en chaque lien de B utilisé, le flot transporté par $\Phi_{B'}$ vaut au plus le flot transporté par Φ .

Comme il existe un flot $\Phi_{B'}$ réalisable dans B' , alors le \mathcal{S}' - \mathcal{D}' -réseau R -généralisé B' est réalisable, et donc le nombre de paquets dans B est borné. Soit R_B le nombre maximum de paquets en transit dans B .

6.4.3.2 Le nombre de paquets en transit dans A est borné

De manière similaire, nous prouvons ici que la partition A peut être vue comme un \mathcal{S}'' - \mathcal{D}'' -réseau R_B -généralisé. Soit Y l'ensemble des nœuds de A ad-

jacents à ceux de B . Nous définissons le \mathcal{S}'' - \mathcal{D}'' -réseau R_B -généralisé A' , avec $\mathcal{S}'' \cup \mathcal{D}'' = Y \cup (\mathcal{D} \cap A) \cup (\mathcal{S} \cap A)$, et prouvons qu'il est réalisable afin de borner le nombre de paquets dans A .

Les ensembles \mathcal{S}'' et \mathcal{D}'' des sources et destinations R_B -généralisées sont définis de la manière suivante :

- chaque nœud dans $A \setminus Y$ garde la même comportement dans A' que celui qu'il avait dans A (et donc dans G) ;
- chaque nœud $v \in Y \setminus (\mathcal{S} \cup \mathcal{D})$ devient une destination R_B -généralisée de \mathcal{D}'' avec $out_{A'}(v) = |\Gamma_{|B}(v)|$, et $in_{A'}(v) = 0$;
- finalement, les paramètres initiaux $in(v)$ et $out(v)$ des sommets $v \in Y \cap (\mathcal{S} \cup \mathcal{D})$ sont modifiés dans A' et deviennent respectivement $in_{A'}(v) = in(v)$, et $out_{A'}(v) = out(v) + |\Gamma_{|B}(v)|$. Si $in_{A'}(v) \geq out_{A'}(v)$, alors $v \in \mathcal{S}''$, sinon $v \in \mathcal{D}''$.

Remarque : Notons que $\mathcal{D}'' \neq \emptyset$. En effet, dans le cas contraire, $\sum_{v \in (\mathcal{S} \cup \mathcal{D})} in(v) > \sum_{v \in Y} |\Gamma_{|B}(v)| = \sum_{v \in (\mathcal{S} \cup \mathcal{D})} \Phi(s^*, v)$ entraînerait une contradiction quant à l'existence d'un flot Φ réalisable dans G .

Grâce à cette dernière remarque, nous pouvons appliquer l'hypothèse d'induction et conclure que si le \mathcal{S}'' - \mathcal{D}'' -réseau R_B -généralisé A' est réalisable, alors l'algorithme LGG est stable sur A' . Puis, comme LGG est stable sur A' et que Y a été choisi de manière à reproduire le même comportement pour A' que celui de A dans G , la stabilité de LGG sur A est alors démontrée.

Il suffit donc de prouver, comme pour B , que le \mathcal{S}'' - \mathcal{D}'' -réseau R_B -généralisé A' est réalisable. Cela est trivial en considérant le flot Φ restreint aux sommet de A' (et donc de A). Ce flot est réalisable dans le graphe A' étendu, et donc le nombre de paquets en transit dans A reste borné.

Ceci conclue la preuve générale du Théorème 6.2 de stabilité de l'algorithme LGG.

6.5 Discussions

Nous venons de démontrer la stabilité de notre algorithme LGG dans un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau où le nombre de paquets injectés à chaque étape est inférieur ou égal à la valeur d'un flot maximum dans le réseau, sous réserve de la Conjecture 6.1

dans le cas où la coupe minimum du réseau se situe au niveau des destinations. Ce travail permet d'envisager de très nombreuses perspectives. En conclusion de ce chapitre, nous présentons les principales conjectures qui découlent de notre étude et qui nous permettent d'entrevoir des résultats très intéressants concernant la stabilité des réseaux à files d'attente.

Nous nous plaçons dans le cas classique des \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseaux tels que nous les avons définis dans la Section 6.1. Dans le cas où le taux d'arrivée change à chaque étape, les hypothèses de stabilité sont les suivantes :

Conjecture 6.2 *Si le taux d'arrivée généré jusqu'à un instant t dépasse la capacité disponible, i.e. la valeur d'un flot maximum, alors il est nécessaire d'avoir du temps après t afin d'extraire le surplus en transit.*

Cette condition est nécessaire et suffisante pour assurer la stabilité de LGG dans le réseau.

Plus formellement, soient G un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau, Φ un s^* - d^* -flot maximum dans G^* de valeur f^* , et $in_t(s)$ le nombre de paquets injectés dans la file d'attente de la source $s \in \mathcal{S}$ au temps t . La condition de stabilité serait alors la suivante :

$$\text{Pour tout } t \text{ et } dt, \text{ si } \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{k=1}^{dt} in_{t+k}(s) > dt \cdot f^*, \text{ alors il existe un temps } t' \text{ tel} \\ \text{que } \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{k=1}^{t'} in_{t+k}(s) \leq (t' - t) \cdot f^*.$$

L'idée de la preuve de cette conjecture serait de considérer que tous les paquets générés lors d'un temps où le nombre de paquets injectés est déjà important, seront en fait générés ultérieurement.

Si maintenant nous considérons le cas où le taux d'arrivée dans le réseau suit une distribution uniforme, alors nous conjecturons le résultat suivant :

Conjecture 6.3 *Si le nombre de paquets $in_t(s)$ générés à l'étape t et injectés dans la file d'attente de la source $s \in \mathcal{S}$ suit une distribution uniforme de moyenne strictement inférieure à la valeur d'une \mathcal{S} - \mathcal{D} -coupe minimum, alors avec forte probabilité notre protocole est stable sur le \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau G .*

Le cas d'un réseau dynamique dans lequel la topologie (les nœuds et les arcs) évoluent au cours du temps, constitue une perspective importante qui sera par ailleurs détaillée dans la conclusion de cette thèse. La stabilité de LGG dans de tels réseaux semble dépendre de l'existence d'un flot dans le réseau. En d'autres termes :

Conjecture 6.4 *Si le nombre de paquets injectés assure l'existence d'un \mathcal{S} - \mathcal{D} -flot, alors notre protocole LGG est stable sur le \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau G , du moins dans le cas non saturé.*

Enfin, une hypothèse que nous avons dû négliger au cours de cette étude est la présence des interférences radio entre les transmissions. Dans notre protocole LGG, cela signifie que l'ensemble des liens E_t à chaque étape est constitué de liens deux à deux sans interférence, correspondant ainsi à la définition des *rounds* dans les chapitres précédents. Un problème supplémentaire est alors de calculer, à chaque temps t , le *round* optimal afin de garantir que le nombre de paquets en transit dans le \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau reste borné. Cette remarque mène à la conjecture suivante :

Conjecture 6.5 *Si un oracle est capable de fournir à un temps donné un ensemble E_t optimal dans le \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau G , alors notre protocole LGG est stable sur G .*

Conclusion et perspectives

La révolution sans fil a motivé un grand nombre de travaux de recherche, notamment sur les réseaux sans fil multi-sauts. En particulier, les réseaux radio maillés apparaissent comme une solution satisfaisante à la fois pour les opérateurs de part leur faible coût de déploiement et de maintenance, et pour les utilisateurs qui peuvent accéder facilement à un nombre toujours plus grand de services quelque que soit l'endroit où ils se trouvent.

L'optimisation de ces réseaux est essentielle. En particulier, une modélisation inter-couche des caractéristiques du réseau permettent de mieux considérer l'impact sur la capacité du réseau qu'ont les différentes interactions entre le modèle physique, le partage des ressources, la topologie, et le routage.

Nous avons présenté dans cette thèse un modèle global d'optimisation des réseaux radio maillés, permettant d'optimiser conjointement le placement de points d'accès dans le réseau, le routage du trafic entre les routeurs et ces points d'accès, tout en assurant un ordonnancement des communications de manière à éviter les collisions radio. Une transformation de la formulation du problème joint du routage et de l'ordonnancement nous permet d'effectuer une relaxation structurelle et linéaire efficace que nous résolvons à l'aide du processus de génération de colonnes. Les tests nous permettent de déduire que la capacité du réseau radio maillé est contrainte par la présence des zones de contention situées autour de chaque point d'accès dans le réseau. Ces zones sont par ailleurs mises en évidence par une nouvelle formulation qui élimine le routage et se concentre sur la capacité de transport disponible sur les coupes du réseau. Le débit atteignable par le réseau est calculé par une couverture des coupes du réseau par les *rounds*. Optimiser avec précision le routage et le partage des ressources dans la zone de contention est nécessaire et suffisant à l'obtention de la capacité maximum dans le réseau. De plus, une étude quantitative a permis de comparer deux modèles de gestion du trafic d'acquittements dans le réseau. Nous voyons que le report des acquittements de la couche MAC à la couche transport induit un gain en capacité significatif dans le réseau. Nous avons enfin présenté un algorithme distribué qui permet de garantir la stabilité d'un réseau sans interférence, dans le cas où la quantité flot injecté à chaque instant dans le réseau est inférieur ou égal à la valeur d'un flot maximum entre les sources et les destinations.

A plusieurs reprises dans nos travaux, nous avons constaté une distance considérable entre l'analyse théorique et les résultats expérimentaux des processus de génération de lignes et de colonnes. Concernant les *rounds* et leur lien avec les stables dans le graphe des conflits, nous avons remarqué que la résolution du problème auxiliaire associé se fait en un temps quasi instantané, quelque soit la taille du réseau. Une observation approfondie de la résolution met en évidence qu'un faible nombre de liens possèdent un coût réduit non nul, ce qui rend leur sélection rapide pour la construction de nouveaux *rounds*. Une étude théorique poussée doit être associée à ces remarques afin de quantifier la complexité en temps de ces problèmes auxiliaires.

Ces travaux mettent en évidence différentes perspectives de recherche. Une des principales voies à explorer concerne la dynamique dans les réseaux. En effet, la réalité des réseaux est dynamique, que ce soit dans la topologie, ou dans le trafic qui circule dans le réseau. Il est très difficile de prendre en compte cette dynamique dans les modèles d'optimisation tels que nous les avons étudiés. La *programmation stochastique* [BL00, CS99], dérivée de la programmation linéaire de part la nature stochastique des variables des formulations linéaires, semble être une solution possible pour des problèmes d'optimisation avec paramètres incertains [RSL04, Sny06, XDCC07].

La prise en compte des aspects dynamiques dans le développement de modèles combinatoires fait émerger de nouvelles notions comme les *graphes évolutifs* [FGM09], ou les *graphes dynamiques* [BXFJ03], dans lesquels la topologie (les nœuds ou les liens) changent au cours du temps. Elles s'appliquent notamment à la modélisation de réseaux dont la dynamique est déterministe ; un travail intéressant serait de modéliser des caractéristiques dynamiques aléatoires. Les travaux du chapitre 6 sur la stabilité d'algorithmes distribués dans des réseaux où le trafic est dynamique, peuvent être un point de départ à cette étude.

Notations et problèmes

A.1 Table des notations

$G = (V, E)$	graphe modélisant le réseau radio maillé
V	nœuds du réseau ($V = V_r \cup V_g$)
V_r	routeurs <i>simples</i>
V_g	points d'accès
E	transmissions possibles entre deux nœuds du réseau (orienté symétrique)
\mathcal{I}_e	arcs interférant avec e
\mathcal{P}	chemins dans G entre V_r et V_g ($\mathcal{P} = \cup_{r \in V_r} \mathcal{P}_r$)
\mathcal{P}_r	chemins dans G entre $r \in V_r$ et V_g
\mathcal{R}	<i>rounds</i> dans G
\mathcal{C}	coupes dans G ne contenant aucun point d'accès
(C, \overline{C})	bord de $C \in \mathcal{C}$ ($(C, \overline{C}) = \{e = (u, v) \in E, u \in C, v \in \overline{C}\}$)
$\delta(R, C)$	intersection entre $R \in \mathcal{R}$ et (C, \overline{C})
$d(r)$	demande de $r \in V_r$
$f(r, e)$	flot de source r envoyé sur l'arc e
$f(P)$	flot envoyé sur le chemin $P \in \mathcal{P}$
$a(t, e)$	activation de e au temps t
$w(R)$	durée d'activation de $R \in \mathcal{R}$
$c_w(x)$	capacité induite par w de l'objet x (arc ou coupe)
$s(v)$	sélection du nœud v comme point d'accès
$y(r, v)$	quantité de flot envoyé par r reçu par v
$u(t)$	utilisation du <i>slot</i> t
β_e	variable duale associée aux liens
γ_v	variable duale associée aux nœuds ou aux commodités
ρ_C	variable duale associée aux coupes
\mathcal{S}	ensemble des sources dans un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau
\mathcal{D}	ensemble des destinations dans un \mathcal{S} - \mathcal{D} -réseau
$in(s)$	nombre de paquets injectés dans la source $s \in \mathcal{S}$
$out(d)$	nombre de paquets extraits par la destination $d \in \mathcal{D}$
$q_t(v)$	taille de la file d'attente du nœud v au temps t

A.2 Enoncés des problèmes

Problème A.1 (MINIMUM GATEWAY PLACEMENT PROBLEM (MGPP))

Entrée : *Un graphe $G = (V, E)$, une demande $d(v)$ sur chaque nœud, la durée de la période de temps T .*

Sortie : *Un sous-ensemble V_g parmi V où installer les points d'accès de sorte que la demande soit satisfaite.*

Objectif : *Minimiser $|V_g|$.*

Problème A.2 (FAIR GATEWAY PLACEMENT PROBLEM (FGPP))

Entrée : *Un graphe $G = (V, E)$, la durée de la période de temps T , un entier n .*

Sortie : *Un sous-ensemble V_g de V , tel que $|V_g| = n$ qui satisfait la demande.*

Objectif : *Maximiser le débit minimum en chaque routeur :*

$$\max \min_{v \in V_r = V \setminus V_g} d(v).$$

Problème A.3 (FAIR JOINT ROUTING AND SCHEDULING PROBLEM (FRSP))

Entrée : *Un graphe $G = (V, E)$ avec $V = V_r \cup V_g$ connus, la durée de la période de temps T .*

Sortie : *Un ordonnancement des liens et un routage entre V_r et V_g sur des chemins multi-sauts dont tous les liens ont pu être activés suffisamment au cours de la période de temps.*

Objectif : *Maximiser $\min_{v \in V_r} d(v)$.*

Problème A.4 (MINIMUM TIME ROUTING AND SCHEDULING PROBLEM (MRSP))

Entrée : *Un graphe $G = (V, E)$ avec $V = V_r \cup V_g$ connus, une demande $d(v)$ sur chaque routeur de V_r .*

Sortie : *Un ordonnancement des liens au cours du temps $[1, T]$ et un routage entre V_r et V_g .*

Objectif : *Minimiser T .*

Problème A.5 (ROUND WEIGHTING PROBLEM (RWP))

Entrée : Un graphe $G = (V, E)$ avec $V = V_r \cup V_g$ connus, une demande $d(v)$ sur $v \in V_r$, un ensemble de rounds \mathcal{R} , un ensemble de chemins \mathcal{P} .

Sortie : Une pondération des rounds $w : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ assurant un routage sur les chemins.

Objectif : Minimiser $\sum_{R \in \mathcal{R}} w(R)$.

Problème A.6 (CUT COVERING PROBLEM (CCP))

Entrée : Un graphe $G = (V, E)$ avec $V = V_r \cup V_g$ connus, une demande $d(v)$ sur $v \in V_r$, un ensemble de rounds \mathcal{R} , un ensemble de coupes \mathcal{C} isolant V_g .

Sortie : Une pondération des rounds $w : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ permettant de couvrir les coupes.

Objectif : Minimiser $\sum_{R \in \mathcal{R}} w(R)$.

Programmation

B.1 Diagramme des classes

Dans cette annexe, nous présentons la programmation des processus de générations de lignes et de colonnes, tels qu'ils ont été implémentés dans MASCOPT, la bibliothèque de graphes. Les classes principales de MASCOPT ne sont pas rappelées, nous vous invitons à vous référer à [LSV04]. Nous présentons dans la première section le processus de génération de colonnes utilisé pour résoudre la formulation chemin/*round* du problème de pondération des *rounds* du Chapitre 3. Puis nous étendons le modèle de génération de colonnes afin d'intégrer la génération de lignes nécessaire à l'algorithme primal-dual présenté dans le Chapitre 4 pour résoudre la formulation coupe/*round*.

B.1.1 La génération de colonnes

Dans cette section, nous présentons un diagramme des classes simplifié de la génération de colonnes telle qu'elle a été implémentée dans MASCOPT.

Un objet du type *PathRoundContinuousSolver* représente un programme linéaire auquel nous souhaitons appliquer la génération de colonnes, dont les variables dépendent des chemins et des *rounds* dans le graphe. Cette classe hérite de la classe *CplexContinuousSolver* permettant d'utiliser le logiciel CPLEX afin de résoudre les programmes linéaires. D'autres logiciels existent, mais nous ne les détaillerons pas ici. Deux sous-programmes peuvent être décrits à partir de cette classe suivant la fonction objectif désirée : soit la longueur de la période de temps T est fixée et le but est de maximiser le débit minimum en chaque routeur (objectif FRSP de la Section 2.3.3), soit la demande en chaque routeur est connue et l'objectif est de minimiser la longueur de la période de temps (formulation RWP de la Section 3.2.2). Ceci définit respectivement les objets des classes *PathRoundMaxD* et *PathRoundMinT*. Dans cette thèse, nous nous sommes concentré sur l'objectif *PathRoundMinT*, mais la programmation laisse libre court au développement

d'autres programmes linéaires auxquels peut s'appliquer la génération de colonnes.

L'interface *CplexFindNewVariables* est paramétrée de manière à pouvoir correspondre à la fois aux chemins et aux *rounds*. Ainsi, un chemin correspond à un objet de la classe *MascotDiPath*, et un *round* est un ensemble d'arcs correspondant à un objet du type *HashSet<MascotArc>*. Un objet du type *CplexFindNewVariablesImpl* constitue une nouvelle colonne que nous cherchons à ajouter à l'ensemble des variables du problème lors de l'exécution du processus de génération de colonnes. Les classes qui héritent de cette classe abstraite décrivent chacune un programme auxiliaire de la génération de colonnes que nous avons présenté dans la Section 3.3 de cette thèse.

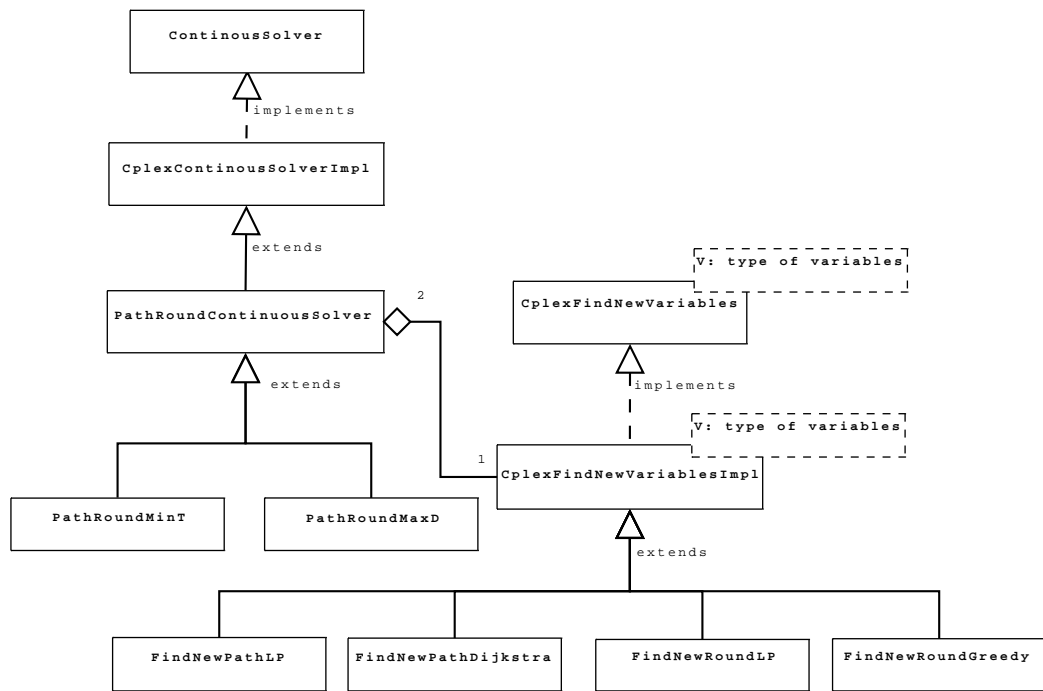
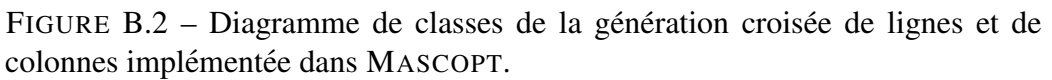


FIGURE B.1 – Diagramme de classes de la génération de colonnes implémentée dans MASCOPT.

B.1.2 La génération croisée

Nous étudions maintenant la modélisation UML de la génération croisée de lignes et de colonnes. Dans ce cas, la classe abstraite *CutRoundContinuousSolver*

hérite, comme *PathRoundContinuousSolver* dans la section précédente, de la classe abstraite *CplexContinuousSolver* afin d'interfacer avec le logiciel CPLEX. Un objet de la classe *CutRoundContinuousSolver* représente un programme linéaire correspondant à la formulation coupe/round présentée dans le Chapitre 4. Il est alors possible, comme pour la génération de colonnes simple, de générer des nouvelles variables (du type *CplexFindNewVariablesImpl*<*HashSet*<*MascotArc*>> pour un *round*), mais également des nouvelles contraintes (du type *CplexFindNewConstraintsImpl*) correspondant à la génération de lignes. Le problème auxiliaire permettant de générer des nouvelles coupes (Section 4.3) est alors décrit dans la classe *FindNewCutLP*.



Bibliographie

- [80207] IEEE Std 802.11-2007. IEEE Standard for Information technology-Telecommunications and information exchange between systems-Local and metropolitan area networks-Specific requirements - Part 11 : Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications. Technical report, June 2007. [7](#), [89](#), [91](#)
- [80209] IEEE Std 802.16-2009. IEEE Standard for Local and metropolitan area networks Part 16 : Air Interface for Broadband Wireless Access Systems. Technical report, May 2009. [9](#), [90](#)
- [ABBS01] B. Awerbuch, P. Berenbrink, A. Brinkmann, and C. Scheideler. Simple routing strategies for adversarial systems. In *42nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 158–167, Las Vegas, Nevada, USA, October 2001. [102](#)
- [ABIK06] B. Aoun, R. Boutaba, Y. Iraqi, and G. Kenward. Gateway placement optimization in wireless mesh networks with QoS constraints. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 24(11) :2127–2136, November 2006. [36](#), [67](#)
- [ABL05] M. Alicherry, R. Bhatia, and L. Li. Joint channel assignment and routing for throughput optimization in multi-radio wireless mesh networks. In *11th Annual ACM International Conference on Mobile Computing and Networking (MobiCom)*, pages 58–72, Cologne, Germany, August 2005. [11](#)
- [ACC⁺08] E. Amaldi, A. Capone, M. Cesana, I. Filippini, and F. Malucelli. Optimization models and methods for planning wireless mesh networks. *Computer Networks*, 52(11) :2159–2171, August 2008. [35](#)
- [AMO93] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin. *Network flows : theory, algorithms, and applications*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, November 1993. [32](#)
- [AWW05] I. F. Akyildiz, X. Wang, and W. Wang. Wireless mesh networks : a survey. *Computer Networks*, 47(4) :445–487, March 2005. [5](#)
- [BGK⁺06] J-C. Bermond, J. Galtier, R. Klasing, N. Morales, and S. Pérennes. Hardness and approximation of gathering in static radio networks. *Parallel Processing Letters*, 16(2) :165–183, June 2006. [33](#), [62](#)

- [BKMS06] V. Bonifaci, P. Korteweg, A. Marchetti-Spaccamela, and L. Stougie. An approximation algorithm for the wireless gathering problem. In *10th Scandinavian Workshop on Algorithm Theory (SWAT)*, pages 328–338, Riga, Latvia, July 2006. 33
- [BKR⁺96] A. Borodin, J. Kleinberg, P. Raghavan, M. Sudan, and D.P. Williamson. Adversarial queuing theory. In *28th ACM Symposium of Foundations of Computer Science (STOC)*, pages 376–385, Philadelphia, Pennsylvania, USA, May 1996. 102
- [BL00] J. R. Birge and F. Louveaux. *Introduction to Stochastic Programming*. Springer Series in Operations Research, Springer :New York, February 2000. 130
- [BSS09] L. X. Bui, S. Sanghavi, and R. Srikant. Distributed link scheduling with constant overhead. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 17(5) :1467–1480, October 2009. 100
- [BXFJ03] B. Bui-Xuan, A. Ferreira, and A. Jarry. Computing shortest, fastest, and foremost journeys in dynamic networks. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 14(2) :267–285, April 2003. 130
- [CACM03] D.S.J. De Couto, D. Aguayo, B.A. Chambers, and R. Morris. Performance of multihop wireless networks : Shortest path is not enough. *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*, 33(1) :83–88, January 2003. 33
- [CCJ90] B. N. Clark, C. J. Colbourn, and D. S. Johnson. Unit disk graphs. *Discrete Mathematics*, 86(1-3) :165–177, December 1990. 25
- [CCPS97] W. J. Cook, W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank, and A. Schrijver. *Combinatorial optimization*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, November 1997. 68, 82
- [CFGM07] G. Carello, I. Filippini, S. Gualandi, and F. Malucelli. Scheduling and routing in wireless multi-hop networks by column generation. In *International Network Optimization Conference (INOC)*, Spa, Belgium, April 2007. 36, 43, 53
- [Chv83] V. Chvátal. *Linear Programming*. W. H. Freeman and Company, New York, NY, USA, September 1983. 11, 13, 15, 47, 57, 68, 70, 83

- [CLR01] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, and R.L. Rivest. *Introduction to algorithms, Second Edition*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, September 2001. 57
- [CLR05] M-C. Costa, L. Létocart, and F. Roupin. Minimal multicut and maximal integer multiflow : A survey. *European Journal of Operational Research*, 162(1) :55–69, April 2005. 68
- [CQJM04] R. Chandra, L. Qiu, K. Jain, and M. Mahdian. Optimizing the placement of integration points in multi-hop wireless networks. In *12th IEEE International Conference on Network Protocols (ICNP)*, pages 271–282, Berlin, Germany, October 2004. 36, 67
- [CS99] C. C. Caroe and R. Schultz. Dual decomposition in stochastic integer programming. *Operations Research Letters*, 24(1-2) :37–45, February 1999. 130
- [DDS05] G. Desaulniers, J. Desrosiers, and M. M. Solomon. *Column generation*. Springer, April 2005. 46
- [DFTT04] O. Dousse, M. Franceschetti, D. Tse, and P. Thiran. Closing the gap in the capacity of random wireless networks. In *IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, page 438, Chicago, IL, USA, June 2004. 10
- [DJLN08] S. Durocher, K. R. Jampani, A. Lubiw, and L. Narayanan. Modeling gateway placement in wireless networks : Geometric k-centres of unit disc graphs. In *International Workshop on Foundation of Mobile Computing (DialM-POMC)*, pages 79–86, Toronto, ON, Canada, August 2008. 35
- [Dju07] P. Djukic. *Scheduling Algorithms for TDMA Wireless Multihop Networks*. PhD thesis, University of Toronto, October 2007. 27
- [DV07] P. Djukic and S. Valaee. Link scheduling for minimum delay in spatial re-use TDMA. In *IEEE Conference on Computer Communications (Infocom)*, pages 28–36, Anchorage, Alaska, USA, May 2007. 27
- [DV08] P. Djukic and S. Valaee. Performance comparison of 802.16 centralized scheduling algorithms, June 2008. Submitted to ACM/Springer Mobile Networks and Applications. 90
- [DV09] P. Djukic and S. Valaee. Delay aware link scheduling for multi-hop TDMA wireless networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 17(1) :870–883, February 2009. 100

- [DW60] G.B. Dantzig and P. Wolfe. Decomposition principles for linear programs. *Operation Research*, 8(1) :101–111, January 1960. 46
- [EV05] S. C. Ergen and Varaiya. TDMA scheduling algorithms for sensor networks. Technical report, University of California, Berkley, July 2005. 27
- [FF62] L. Ford and D. Fulkerson. *Flows in Networks*. Princeton University Press, June 1962. 69, 75
- [FGM09] A. Ferreira, A. Goldman, and J. Monteiro. Performance evaluation of routing protocols for manets with known connectivity patterns using evolving graphs. *Wireless Networks*, 2009. Published online. 130
- [GDP05] S. Gandham, M. Dawande, and R. Prakash. Link scheduling in sensor networks : distributed edge coloring revisited. In *IEEE Conference on Computer Communications (Infocom)*, volume 4, pages 2492– 2501, Miami, FL, USA, March 2005. 27
- [GK00] P. Gupta and P.R. Kumar. The capacity of wireless networks. *IEEE Transactions on Information Theory*, 46(2) :388–404, March 2000. 10, 89
- [GL997] *Wireless Communications : Tdma Versus Cdma*. Kluwer Academic Publishers, August 1997. 27
- [GLS81] M. Grotschel, L. Lovasz, and A. Schrijver. The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica*, 1(2) :169–197, June 1981. 16, 79
- [GMR08] C. Gomes, C. Molle, and P. Reyes. Optimal design of wireless mesh networks. In *9èmes Journées Doctorales en Informatique et Réseaux (JDIR)*, pages 67–76, Villeneuve d’Ascq, France, January 2008. 17
- [GMRR07a] C. Gomes, C. Molle, P. Reyes, and H. Rivano. Models for optimal wireless mesh network design. In *22nd European Conference on Operational Research (EURO XXII)*, page 43, Prague, Czech Republic, July 2007. 17
- [GMRR07b] C. Gomes, C. Molle, P. Reyes, and H. Rivano. Placement optimal de points d’accès dans les réseaux radio maillés. In *9èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques*

- des Télécommunications (AlgoTel)*, pages 117–120, Ile d’Oléron, France, May 2007. [17](#)
- [GPRR08] C. Gomes, S. Pérennes, P. Reyes, and H. Rivano. Bandwidth allocation in radio grid networks. In *10èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques de Télécommunications (AlgoTel)*, pages 41–44, Saint-Malo, France, May 2008. [83](#), [84](#)
- [GT88] A. V. Goldberg and R. E. Tarjan. A new approach to the maximum-flow problem. *Journal of the Association for Computing Machinery (ACM)*, 35(4) :921–940, October 1988. [75](#), [102](#)
- [HHS03] C. S. Hsu, P. K. Hung, and J. P. Sheu. Scheduling of broadcasts in multihop wireless networks. In *The handbook of ad hoc wireless networks*, pages 483–495. CRC Press, 2003. [37](#)
- [HLMP06] T. Huovila, P. Lassila, J. Manner, and A. Penttinen. State of the art analysis of wireless mesh technologies 2006. Technical report, Helsinki University of Technology, November 2006. [5](#)
- [HM04] R. Hekmat and P. Van Mieghem. Connectivity in wireless ad-hoc networks with an improved radio model. In *Workshop on Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks (WiOpt)*, Cambridge, UK, March 2004. [24](#)
- [IRK09] A. Iyer, C. Rosenberg, and A. Karnik. What is the right model for wireless channel interference ? *IEEE Transaction Wireless Communications*, 8(5) :2662–2671, May 2009. [27](#)
- [JPPQ03] K. Jain, J. Padhye, V. Padhamanabhan, and L. Qiu. Impact of interference on multi-hop wireless network performance. In *9th Annual ACM International Conference on Mobile Computing and Networking (MobiCom)*, pages 66–80, San Diego, CA, USA, September 2003. [10](#), [58](#), [89](#)
- [JS03] J. Jun and M.L. Sichitiu. The nominal capacity of wireless mesh networks. *IEEE Wireless Communications*, 10(5) :8–14, October 2003. [10](#), [89](#)
- [KIR08] A. Karnik, A. Iyer, and C. Rosenberg. Throughput-optimal configuration of fixed wireless networks. *IEEE/ACM Transactions On Networking*, 16(5) :1161–1174, October 2008. [10](#), [11](#), [33](#)
- [KKS04] R. K. Kave, R. Khalili, and K. Salamatian. Evaluation of packet error rate in wireless networks, 2004. [24](#)

- [KMP08] R. Klasing, N. Morales, and S. Pérennes. On the complexity of bandwidth allocation in radio networks. *Theoretical Computer Science*, 406(3) :225–239, October 2008. [31](#), [43](#), [50](#)
- [KMPS05] A. Kumar, M. Marathe, S. Parthasarathy, and A. Srinivasan. Algorithmic aspects of capacity in wireless networks. In *ACM International Conference on Measurements and Modeling of Computer Systems (SIGMETRICS)*, volume 33, pages 133–144, Banff, Alberta, Canada, June 2005. [11](#)
- [KN03] M. Kodialam and T. Nandagopal. Characterizing achievable rates in multi-hop wireless networks : the joint routing and scheduling problem. In *9th Annual ACM International Conference on Mobile Computing and Networking (MobiCom)*, pages 42–54, San Diego, CA, USA, September 2003. [36](#)
- [KN05] M. Kodialam and T. Nandagopal. On the capacity region of multi-radio multi-channel wireless mesh networks. In *First IEEE Workshop on Wireless Mesh Networks (WiMesh)*, Santa Clara, CA, USA, September 2005. [10](#), [89](#)
- [Lal04] J-F. Lalande. *Conception de réseaux de télécommunications : optimisation et expérimentations*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, December 2004. [16](#)
- [LD05] M. E. Lubbecke and J. Desrosiers. Selected topics in column generation. *Operations Research*, 53(6) :1007–1023, December 2005. [46](#)
- [LGR09] J. Luo, A. Girard, and C. Rosenberg. Efficient algorithms to solve a class of resource allocation problems in large wireless networks. In *7th International Symposium on Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc, and Wireless Networks (WiOpt)*, Seoul, Korea, June 2009. [53](#)
- [LHFL07] Pan Li, Xiaoxia Huang, Yuguang Fang, and Phone Lin. Optimal placement of gateways in vehicular networks. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 56(6) :3421–3430, November 2007. [35](#)
- [LSS09] S. Lakshmanan, R. Sivakumar, and K. Sundaresan. Multi-gateway association in wireless mesh networks. *Ad-Hoc Networks*, 7(3) :622–637, May 2009. [33](#), [46](#)

- [LSV04] J-F. Lalande, M. Syska, and Y. Verhoeven. Mascot - a network optimization library : Graph manipulation. Technical Report 0293, INRIA, April 2004. <http://www-sop.inria.fr/mascotte/mascot/>. 16, 135
- [LZ05] H. Liu and B. Zhao. Optimal scheduling for link assignment in traffic-sensitive stdma wireless ad-hoc networks. In *International Conference on Computer Network and Mobile Computing (ICCNMC)*, volume 3619 of *LNCS*, pages 218–228, Zhangjiajie, China, August 2005. 27
- [MA05] D. Miorandi and E. Altman. Coverage and connectivity of ad hoc networks in presence of channel randomness. In *IEEE Conference on Computer Communications (Infocom)*, pages 491–502, Miami, FL, USA, March 2005. 24
- [Mor07] N. Morales. *Algorithmique des réseaux de communication radio modélisés par des graphes*. PhD thesis, École doctorale STIC, Université de Nice-Sophia Antipolis, January 2007. 43, 51, 100
- [MPPR08a] C. Molle, F. Peix, S. Pérennes, and H. Rivano. Formulation en coupe/rounds pour le routage dans les réseaux radio maillés. In *10èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques de Télécommunications (AlgoTel)*, pages 97–100, Saint Malo, France, May 2008. 18
- [MPPR08b] C. Molle, F. Peix, S. Pérennes, and H. Rivano. Optimal routing and call scheduling in wireless mesh networks with localized information. In C. Kaklamanis and F. Nielson, editors, *4th International Symposium on Trustworthy Global Computing (TGC)*, volume 5474 of *LNCS*, pages 171–185, Barcelona, Spain, November 2008. 18
- [MPR06] G. Meheut, S. Perennes, and H. Rivano. Evaluation stochastique et simulation des réseaux radio. Research report 5989, INRIA, September 2006. 10
- [MPR08a] C. Molle, F. Peix, and H. Rivano. Génération de colonnes pour le routage et l’ordonnancement dans les réseaux radio maillés. In *Colloque francophone sur l’ingénierie des protocoles (CFIP)*, pages 119–130, Les Arcs, France, March 2008. Best student paper award. 18
- [MPR08b] C. Molle, F. Peix, and H. Rivano. An optimization framework for the joint routing and scheduling in wireless mesh networks. In *19th*

- IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC)*, pages 2792–2796, Cannes, France, September 2008. 18
- [MR08] S. N. Muthaiah and C. Rosenberg. Single gateway placement in wireless mesh networks. In *8th International IEEE Symposium on Computer Networks (ISCN)*, Istanbul, Turkey, June 2008. 11
- [MSHD07] S. Max, L. Stibor, G. Hiertz, and D. Denteneer. IEEE 802.11s mesh network deployment concepts. In *13th European Wireless Conference (EW)*, page 7, Paris, France, April 2007. 9
- [MV06] S. Mukherjee and H. Viswanathan. Throughput-range tradeoff of wireless mesh backhaul networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 24(3) :593–602, March 2006. 11
- [MV08] C. Molle and M-E. Voge. Influence des acquittements sur la capacité des réseaux radio maillés. In *10èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques de Télécommunications (AlgoTel)*, pages 45–48, Saint Malo, France, May 2008. 18
- [MV09] C. Molle and M-E. Voge. Effects of the acknowledgment traffic on the capacity of wireless mesh networks. In *69th IEEE Vehicular Technology Conference (VTC) Spring*, pages 1–5, Barcelona, Spain, April 2009. 18
- [MWW07] J. Mao, Z. Wu, and X. Wu. A tdma scheduling scheme for many-to-one communications in wireless sensor networks. *Computer Communications (Elsevier)*, 30(4) :863–872, 2007. 27
- [NHD08] M. Nassiri, M. Heusse, and A. Duda. A novel access method for supporting absolute and proportional priorities in 802.11 wlans. In *27th IEEE Conference on Computer Communications (Infocom)*, pages 709–717, Phoenix, AZ, USA, April 2008. 8
- [NKK08] A.D. Gore N.P. Kumar and A. Karandikar. Link scheduling in stdma wireless networks : A line graph approach. In *14th National Conference on Communications (NCC)*, pages 108–111, IIT-Bombay, India, February 2008. 29
- [NS2] The network simulator ns-2. http://nsnam.isi.edu/nsnam/index.php/Main_Page. 100
- [Oun08] A. Ouni. Capacity of wireless mesh networks : how to improve it ? Rapport de stage ingénieur, Laboratoire CITI, INSA Lyon, 2008. 64

- [Pel87] D. Peleg. *Distributed computing : a locality-sensitive approach*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, USA, January 1987. 101
- [PLBD05] T.L. Pham, I. Lavallee, M. Bui, and S.H. Do. A distributed algorithm for the maximum flow problem. In *4th International Symposium on Parallel and Distributed Computing (ISPDC)*, pages 131–138, Lille, France, July 2005. 102
- [PR90] M. Padberg and G. Rinaldi. An efficient algorithm for the minimum capacity cut problem. *Mathematical Programming*, 47(1-3) :19–36, May 1990. 76
- [RGL08] T. Razafindralambo and I. Guerin-Lassous. Increasing fairness and efficiency using the madmac protocol in ad hoc networks. *Ad-Hoc Networks Journal (Elsevier)*, 6(3) :408–423, May 2008. 8
- [Riv03] H. Rivano. *Algorithmique et Télécommunications : Coloration et multiflot approchés et applications aux réseaux d'infrastructure*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, November 2003. 45
- [RL93] S. Ramanathan and E. L. Lloyd. Scheduling algorithms for multihop radio networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 1(2) :166–177, April 1993. 27
- [RSL04] M. Riis, A. J. V. Skriver, and J. Lodahl. Deployment of mobile switching centers in a telecommunications network : a stochastic programming approach. *Telecommunication Systems*, 26(1) :93–109, May 2004. 130
- [RTV06] H. Rivano, F. Theoleyre, and F. Valois. Capacity evaluation framework and validation of self-organized routing schemes. In *IEEE International Workshop on Wireless Ad-hoc and Sensor Networks (IWWAN)*, volume 3, pages 779–785, New York, NY, USA, September 2006. 11
- [Sch98] A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. Wiley - Interscience series in discrete mathematics and optimization, New York, NY, USA, June 1998. 15
- [Sny06] L. V. Snyder. Facility address under uncertainty : a review. *IIE Transactions*, 38(7) :547–564, June 2006. 130

- [Sta07] W. Stallings. *Réseaux et communication sans fil (2ème édition)*. Pearson Education, June 2007. [26](#)
- [SW97] M. Stoer and F. Wagner. A simple min-cut algorithm. *Journal of the Association for Computing Machinery (ACM)*, 44(4) :585–591, July 1997. [76](#)
- [TE92] L. Tassiulas and A. Ephremides. Stability properties of constrained queueing systems and scheduling policies for maximum throughput in multihop radio networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(12) :1936–1948, December 1992. [102](#), [106](#)
- [TNS07] M. Taïfour, F. Naït-Abdesselam, and D. Simplot-Ryl. Rc-mac : reduced collision mac for bandwidth optimization in wireless local area networks. In *ACS/IEEE International Conference on Computer Systems and Applications (AICCSA)*, pages 195–202, Ammam, Jordan, May 2007. [8](#)
- [Tsa97] P. Tsaparas. Stability in adversarial queueing theory. Technical report, Master Thesis, Department of Computer Science, University of Toronto, 1997. [102](#)
- [TT07] W. H. Tam and Y. C. Tseng. Joint multi-channel link layer and multi-path routing design for wireless mesh networks. In *IEEE Conference on Computer Communications (Infocom)*, pages 2081–2089, Anchorage, Alaska, USA, May 2007. [33](#)
- [Vit95] A. J. Viterbi. *CDMA : Principles of Spread Spectrum Communication*. Addison Wesley, May 1995. [26](#)
- [Vyg05] J. Vygen. Approximation Algorithms for Facility address Problems (Lecture Notes). Technical Report 05950-OR, Research Institute for Discrete Mathematics, University of Bonn, 2005. [35](#)
- [WB07] P. Wang and S. Bohacek. Toward tractable computation of the capacity of multihop wireless networks. In *IEEE Conference on Computer Communications (Infocom)*, pages 2099–2107, Anchorage, Alaska, USA, May 2007. [11](#)
- [WS05] X. Wu and R. Srikant. Regulated maximal matching : A distributed scheduling algorithm for multi-hop wireless networks with node-exclusive spectrum sharing. In *44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference (CDC-ECC)*, pages 5342–5347, Seville, Spain, December 2005. [101](#)

- [WSN] Wsnet simulator. <http://wsnet.gforge.inria.fr/>. 100
- [XDCC07] Y. Xue, L. Dai, B. Chang, and Y. Cui. Throughput optimization routing under uncertain demand for wireless mesh networks. In *IEEE International Conference on Mobile Adhoc and Sensor Systems (MASS)*, pages 1–11, Pisa, Italy, October 2007. 130
- [YKC06] H.K. Wu Y.L. Kuo, C.Y. Chiu and G.H. Chen. Maximum bandwidth routing in csma/ca-based wireless multi-hop wireless mesh networks. Technical Report NTU-TR-506, National Taiwan University Taipei Taiwan, 2006. 33, 37
- [YY07] W. Youssef and M. Younis. Intelligent gateways placement for reduced data latency in wireless sensor networks. In *IEEE International Conference on Communications (ICC)*, pages 3805–3810, Glasgow, Scotland, June 2007. 35
- [ZWR08] P. Zhou, X. Wang, and R. Rao. Asymptotic capacity of infrastructure wireless mesh networks. *IEEE Transactions of Mobile Computing*, 7(8) :1011–1024, June 2008. 11
- [ZWZL05] J. Zhang, H. Wu, Q. Zhang, and B. Li. Joint routing and scheduling in multi-radio multi-channel multi-hop wireless networks. In *IEEE International Conference on Broadband Networks (BROADNETS)*, pages 678–687, Boston, MA, USA, October 2005. 36, 43

Résumé : Dans cette thèse, nous nous intéressons aux problématiques d'optimisation de la capacité des réseaux radio maillés. Cette architecture de réseau d'accès est particulièrement pertinente en milieu urbain ou en situation opérationnelle militaire. Nous définissons la capacité d'un réseau comme la quantité de flot que peut répartir équitablement une topologie aux utilisateurs qu'elle sert. Afin d'obtenir des bornes théoriques sur les performances du réseau, nous développons des modèles d'optimisation intégrant les caractéristiques inter-couche des communications radio.

Nous étudions plus précisément le problème joint du routage et de l'ordonnancement. Nous développons, pour la relaxation linéaire de ce problème, une méthode de résolution efficace utilisant la génération de colonnes. Nous dérivons ensuite une formulation qui élimine le routage pour se concentrer sur la capacité de transport disponible sur les coupes du réseau. L'équivalence des solutions optimales est démontrée, et le processus de résolution est adapté en une génération croisée de lignes et de colonnes. Ces études mettent en évidence la présence d'une zone de contention autour de chaque point d'accès qui contraint la capacité du réseau. Ces résultats permettent une étude quantitative des effets du trafic d'acquiescement sur la capacité. Nous présentons enfin une étude de la stabilité d'un protocole routant du trafic injecté de manière arbitraire au cours du temps. Nous améliorons les résultats existants en démontrant la stabilité quand le trafic injecté est un flot maximum.

L'ensemble de ces travaux a été implémenté dans la bibliothèque *open source* MASCOPT (*Mascotte Optimisation*) dédiée aux problèmes d'optimisation des réseaux.

Mots clés : Optimisation, programmation linéaire, réseaux radio maillés, capacité

Abstract : In this thesis, we focus on optimizing the capacity of wireless mesh networks. These broadband access networks are a promising solution in urban areas and for military operations. We define the capacity of a wireless mesh network as the fair throughput offered to each flow. In order to get theoretical bounds on the network performances, we develop optimization models integrating the cross-layer characteristics of radio communications.

More precisely, we study the joint routing and scheduling problem. We develop, for the linear relaxation of the problem, a resolution method based on the column generation process. We derive a linear formulation which focus on the transport capacity available on the network cuts. We prove the equivalence of the models, and adapt the resolution method into a cross line and column generation process. Thorough tests, we point out a contention area located around the mesh gateways which constraints the network capacity. These results are applied to a quantitative study of the effects of acknowledgments on the capacity. We then present a stability study of a protocol which routes a traffic injected arbitrarily. We improve existing results by showing the stability even if the total traffic injected is a maximum flow.

All this research work has been implemented in the open-source library MASCOPT (*Mascotte Optimisation*) dedicated to network optimization problems.

Keywords : Optimization, linear programming, wireless mesh networks, capacity